

**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 1996-1997.**

Opción A

Modelo1 Ejercicio 1 opción A sobrantes 1996

La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 300t(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas

(a)[1 punto] . Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. Cuándo es nula?

(b) [0'75 puntos] ¿Cual es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca

(c) [0'75 puntos] Representa gráficamente la función de capacidad concentración.

Solución

a)

$f : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 300t(3 - t) = 900t - 300t^2$

Estudiamos la monotonía, es decir la primera derivada $f'(t)$

$$f(t) = 900t - 300t^2$$

$$f'(t) = 900 - 600t$$

$f'(t) = 0$, de donde $900 - 600t = 0$ y la solución es $t = 3/2$ que es el posible máximo o mínimo relativo.

Como $f'(1) = 300 > 0$, $f(t)$ es estrictamente creciente en $(0, 3/2)$. La concentración aumenta.

Como $f'(2) = -300 < 0$, $f(t)$ es estrictamente decreciente en $(3/2, 0)$. La concentración disminuye.

Por definición $x = 3/2$ es un máximo relativo que vale $f(3/2) = 675$

Como la función es continua y derivable en el intervalo $[0,3]$ los extremos absolutos se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos es decir en $t = 0$, $t = 3/2$ y $t = 3$.

El mayor valor será el máximo absoluto y el menor valor será el mínimo absoluto.

$$f(0) = 0 \quad \text{Concentración nula}$$

$$f(3/2) = 675 \quad \text{Concentración máxima}$$

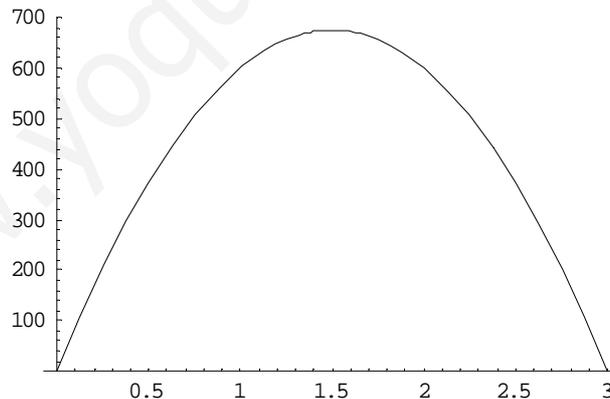
$$f(3) = 0 \quad \text{Concentración nula}$$

b)

El mejor momento es el de concentración máxima que se alcanza a las $3/2 = 1'5$ horas del comienzo

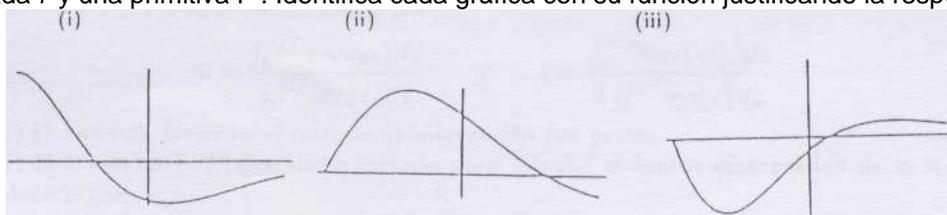
c)

La gráfica es la gráfica de una parábola, que tiene el vértice (máximo) en $t = 3/2$, y además en $t = 0$ y $t = 3$ vale 0. Luego la gráfica es



Modelo1 Ejercicio 2 opción A sobrantes 1996

[2'5 Puntos] Las gráficas (i), (ii) y (iii) corresponden, no por ese orden, a las de una función derivable f , su función derivada f' y una primitiva F . Identifica cada gráfica con su función justificando la respuesta.



Solución

Sea $F(x) = \int f(x)dx$ con lo cual por el teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x)$ y $F''(x) = f'(x)$.

Si (i) es $F'(x) = f(x)$ tenemos lo siguiente:

$F'(x) > 0$ en $(-3,-1)$ aproximadamente, con lo cual $F(x)$ crece en $(-3,-1)$

$F'(x) < 0$ en $(-1,3)$ aproximadamente, con lo cual $F(x)$ decrece en $(-1,3)$. Luego la figura (ii) es la gráfica de $F(x)$.

$F'(x)$ es decreciente en $(-3,0.5)$ aproximadamente, con lo cual $F''(x) = f'(x) < 0$ en $(-3,0.5)$

$F'(x)$ es creciente en $(0.5, 3)$ aproximadamente, con lo cual $F''(x) = f'(x) > 0$ en $(0.5,3)$. Con lo cual la figura (iii) es la gráfica de $F''(x) = f''(x)$

Según este pequeño estudio efectivamente (i) es la gráfica de $f(x)$, (ii) la gráfica de $F(x)$ y (iii) la gráfica de $F''(x) = f''(x)$

Modelo1 Ejercicio 3 opción A sobrantes 1996

(a) [1 punto] Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Justifica la respuesta

(b) [1'5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ no es cierta en general porque sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y por tanto AB no tiene que coincidir con BA , por tanto $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ en general.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a F + 1^a F(-2) \\ 3^a F + 1^a F(-3) \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 12-3a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 12-3a \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a F/2 \\ 3^a F/3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4-1a \\ 0 & 0 & 0 & 4-1a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4-1a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4-1a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

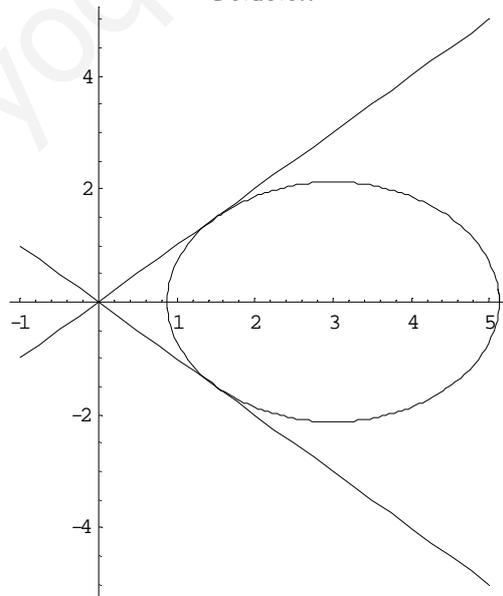
Si $4 - a = 0$, $a = 4$ la matriz tiene una sola fila con elementos distintos de cero por tanto el rango es 1 (número de filas linealmente independientes, es decir número de filas con algún elemento distinto de cero).

Si $a \neq 4$ el rango de la matriz es 2 pues hay dos filas con algún elemento distinto de cero.

Modelo1 Ejercicio 4 opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Desde el origen de coordenadas pueden trazarse dos, rectas tangentes a la circunferencia que tiene su centro en el punto $(3,0)$ y cuyo radio vale $3/\sqrt{2}$. ¿Cuales son las ecuaciones de dichas rectas tangentes?

Solución



La ecuación de la circunferencia que tiene por centro $(3,0)$ y radio $3/\sqrt{2}$ es

$$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = [3/\sqrt{2}]^2. \text{ Operando nos queda } (x - 3)^2 + y^2 = 9/2$$

La recta tangente que pasa por el punto (a,b) de la circunferencia es $y - b = y'_{(a,b)}(x - a)$, siendo $y'_{(a,b)}$ la

derivada implícita de la ecuación de la circunferencia en el punto (a,b)

Derivamos implícitamente $(x - 3)^2 + y^2 = 9/2$

$2 \cdot (x - 3) + 2y \cdot y' = 0$. Despejando y' , nos queda $y' = (3 - x)/y$, con lo cual $y'_{(a,b)} = (3 - a)/b$ y la recta tangente pedida es:

$$y - b = ((3 - a)/b) \cdot (x - a).$$

La recta tangente pasa por el origen (0,0), por tanto $0 - b = ((3 - a)/b) \cdot (0 - a)$, y operando tenemos la ecuación $-a^2 - b^2 + 3a = 0$

El punto (a,b) verifica la ecuación de la circunferencia, por tanto $(a - 3)^2 + b^2 = 9/2$, y operando tenemos la ecuación $+a^2 + b^2 - 6a + 9 = 9/2$

Resolvemos el sistema

$$-a^2 - b^2 + 3a = 0$$

$$+a^2 + b^2 - 6a + 9 = 9/2$$

Sumando tenemos $-3a + 9 = 9/2$ de donde $a = 3/2$.

Entrando con $a = 3/2$ en la ecuación $-a^2 - b^2 + 3a = 0$ tenemos $b^2 = 9/4$ de donde $b = +3/2$ y $b = -3/2$,

Los puntos (a,b) donde tocan las rectas tangentes a la circunferencia son $(3/2, 3/2)$ y $(3/2, -3/2)$ por tanto las rectas tangentes son:

$$y - (3/2) = ((3 - 3/2)/(3/2)) \cdot (x - 3/2). \text{ Operando nos queda } y = x$$

$$y - (-3/2) = ((3 - 3/2)/(-3/2)) \cdot (x - 3/2). \text{ Operando nos queda } y = -x$$

Opción B

Modelo1 Ejercicio 1 opción B sobrantes 1996

Una partícula si mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$

En el punto P = (2, -4/3) la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

(a) [1 punto]. Halla la ecuación de dicha recta tangente

(b) [0'5 puntos]. Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

(c) [1 punto]. Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

Solución

a)

$$y = \frac{2x}{1-x^2} \text{ para } x > 1$$

Recta tangente en (2, -4/3) es $y - (-4/3) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f'(x) = [2(1 - x^2) - (2x)(-2x)] / [1 - x^2]^2 = (2x^2 + 2) / (1 - x^2)^2, \text{ de donde } f'(2) = 10/9$$

La recta tangente pedida es $y + 4/3 = (10/9)(x - 2)$

b)

Si $1 < x < 2$, $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ y el corte con el eje OX es $f(x) = 0$ que nos da $x = 0$ lo cual no nos sirve porque esta función nos la han dado solo para $1 < x < 2$.

Veamos si para $x \geq 2$ la función tangente $y = (10/9)x - 20/9 - 4/3 = (10/9)x - 36/9$ corta al eje OX. Hacemos $y = 0$, quedándonos $x = 36/10 = 18/5 \cong 3'6$

c)

La asíntota vertical mas próxima al punto P es $x = 1$ porque $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = 2/0^- = -\infty$.

Como es una asíntota la función $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ definida en $1 < x < 2$ no puede tocarla nunca.

Modelo1 Ejercicio 2 opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. De una función integrable $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene $|f(x)| \leq 1 + x^2$

De los números -3, -2, -1, 2'5 y 2'75 ¿cuales pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$. Justifica la respuesta.

Solución

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene $|f(x)| \leq 1 + x^2$
Sabemos que si $|x| \leq a$ tenemos que $-a \leq x \leq a$, por tanto de $|f(x)| \leq 1 + x^2$ tenemos también
 $-1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$

También sabemos que $\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx$. Por tanto

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = (1 + 1/3) - (-1 - 1/3) = 2 + 2/3 = 8/3 \cong 2'66$$

Por otro lado de $-1 - x^2 \leq f(x)$ tenemos $f(x) \geq -1 - x^2$ e integrando nos resulta

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \geq \int_{-1}^1 (-1-x^2) dx = \left[-x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = (-1 - 1/3) - (1 + 1/3) = -8/3 \cong -2'66$$

Hemos obtenido $-2'66 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 2'66$, con lo cual los números que pueden ser solución de $\int_{-1}^1 f(x) dx$ son $-2, -1$ y $2'5$.

Modelo1 Ejercicio 3 opción B sobrantes 1996

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4, \\ x - 2y - 2z &= -1, \\ x - z &= 1. \end{aligned}$$

- (a) [0'75 puntos] ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?
(b) [0'75 puntos]. Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.
(c) [1 punto]. Haz una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones

Solución

a)

Si $y = 0$ el sistema de ecuaciones nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2x - z &= 4, \\ x - 2z &= -1, \\ x - z &= 1. \end{aligned}$$

Resolvemos las dos últimas ecuaciones

$$x - 2z = -1,$$

$$x - z = 1. \quad \text{Operando } 2^a + 1^a(-1) \text{ nos da}$$

$$z = 2, \text{ con lo cual } x = 3$$

Veamos si estas soluciones verifican la ecuación $2x - z = 4$. $2(3) - 2 = 4$, lo cual es cierto por tanto el sistema original si admite una solución con $y = 0$, que es $(x, y, z) = (3, 0, 2)$

b)

El sistema homogéneo asociado al dado es

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 0, \\ x - 2y - 2z &= 0, \\ x - z &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si el determinante es distinto de cero la única solución es

la trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} 3^a C + 1^a C \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0, \text{ por tanto la única solución del}$$

sistema homogéneo es la trivial.

c)

Como $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*)$, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única que es la que calculamos en el apartado a) $(x, y, z) = (3, 0, 2)$. Geométricamente nos dice que son tres planos independientes entre sí que se cortan en el punto $(3, 0, 2)$.

Modelo1 Ejercicio 4 opción B sobrantes 1996

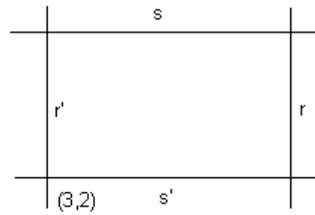
[2,5 puntos] Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto $(3, 2)$ y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones

$$r \equiv 2x + 3y - 7 = 0, \quad s \equiv x - 3y + 4 = 0$$

Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

Solución

$$r \equiv 2x + 3y - 7 = 0, \quad s \equiv x - 3y + 4 = 0$$



El punto (3,2) no pertenece a ninguna de las rectas dadas "r" y "s" que no son paralelas porque sus vectores normales $\mathbf{n} = (2,3)$ de r y $\mathbf{v} = (1,-3)$ no son proporcionales, por tanto la posición de las rectas en el paralelogramo es la que aparece en la figura anterior.

La recta paralela a "s" que pasa por (3,2) es $x - 3y + K = 0$, $3 - 6 + K = 0$, de donde $K = 3$ y la recta pedida es "s'" $\equiv x - 3y + 3 = 0$.

La recta paralela a "r" que pasa por (3,2) es $2x + 3y + K = 0$, $6 + 6 + K = 0$, de donde $K = -12$ y la recta pedida es "r'" $\equiv 2x + 3y - 12 = 0$.