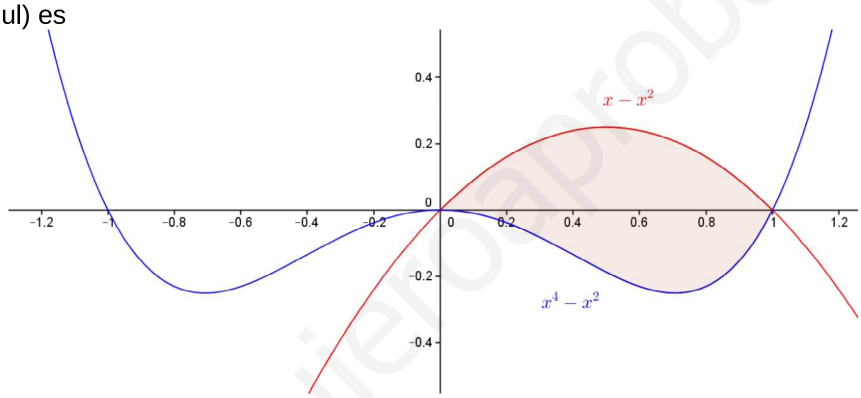
OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 6 de 1997.

(a) Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x - x^2$ e $y = x^4 - x^2$.
(b) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a)
La gráfica de $y = x - x^2$ es una parábola (en rojo) con las ramas hacia abajo
Su vértice es V = (1/2, ½ -1/4) = (0'5, 0'25), y corta a los ejes en los puntos (0,0) y (1,0)
$y = x^4 - x^2$, es una cuartica, $\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - x^2) = +\infty$
Corta a los ejes en (-1,0), (0,0) y (1,0)
Como f(-x) = f(x) es par y simétrica respecto al eje OY
Estudiemos f ' (x) para ver su monotonía y extremos.
$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$
f ' (x) = 0 cuando x = 0, $x = +\sqrt{2}/2$ y $x = -\sqrt{2}/2$
Si $x < -\sqrt{2}/2$, f ' (x) < 0, luego f(x) es decreciente en $x < -\sqrt{2}/2$
Si $-\sqrt{2}/2 < x < 0$, f ' (x) > 0, luego f(x) es creciente si $-\sqrt{2}/2 < x < 0$
Si $0 < x < +\sqrt{2}/2$, f ' (x) < 0, luego f(x) es decreciente en $0 < x < +\sqrt{2}/2$
Si $x > +\sqrt{2}/2$, f ' (x) > 0, luego f(x) es creciente en $x > +\sqrt{2}/2$
Por definición en $x = -\sqrt{2}/2$, y en $x = +\sqrt{2}/2$ hay sendos mínimos relativos y en x = 0 un máximo
Por tanto su gráfica (en azul) es



(b)
Para hallar el área del recinto descrito en el apartado anterior, hemos de ver los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de la ecuación
$x - x^2 = x^4 - x^2$, es decir la ecuación $x^4 - x = 0 = x(x^3 - 1) = 0$, y sus soluciones son x = 0 y x = 1.

$$\text{Area} = \int_0^1 \left[(x-x^2)-(x^4-x^2)\right]dx = \int_0^1 \left[(x-x^4)\right]\ dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1/2 - 1/5 = 3/10 \quad \text{u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 6 de 1997.

Dada la función f : R → R definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$, halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en su punto de inflexión

Solución

Su punto de inflexión anula su segunda derivada
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 2$
$f''(x) = 6x - 12$
Si f '' (x) = 0, tenemos x = 2, que es el punto de inflexión pues a su izquierda y derecha la función cambia de concavidad
La recta tangente en x = 2 es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$
Como f(2) = 8-24+4 = -12 y f ' (2) = 12-24+2 = -10, la recta tangente pedida es $y - (-12) = -10(x - 2)$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 6 de 1997.

Sea A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = -1,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 2,$$

Resuelve el sistema sabiendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Tenemos el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Su resolución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

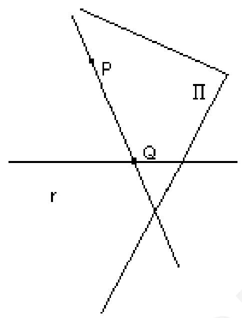
Ejercicio 4 de la opción A del modelo 6 de 1997.

Considera el punto P = (2, 1, 3) y la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x-y-5=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

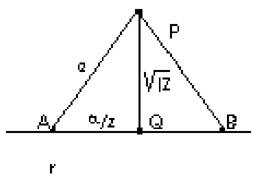
(a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
(b) Determina dos puntos A y B de la recta r de forma que el triángulo PAB sea equilátero.

Solución

(a)



Para hallar la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r., voy a calcular el punto Q de la recta r que está en la perpendicular y luego determino la recta que pasa por Q y P.
Para el punto Q calculo el plano Π perpendicular a la recta r por P, y a continuación determino Q como intersección de la recta r con el plano Π
La recta r la ponemos en vectorial, tomando y = λ, nos resulta
r ≡ (x,y,z) = (λ+5,λ,1). Un vector director suyo es **v** = (1,1,0)
El plano Π, pasa por el punto P(2,1,3) y tiene como vector directo **n** = **v** = (1,1,0), luego es
Π ≡ -1(x-2) –1(y-1) + 0(z-3) = -x – y + 3 = 0
Q = r ∩ Π
- (λ+5) – (λ) + 3 = 0, -2λ -2 = 0, de donde λ = - 1 y el punto Q(-1 + 5, -1, 1) = Q(4,-1,1)
La recta pedida s es la que pasa por los puntos P y Q, luego tomo como punto P(2,1,3) y como vector director **PQ** = (2,-2,2)
En vectorial
s ≡ (x,y,z) = (2 + 2λ, 1 - 2λ, 3 + 2λ).
(b)



Determina dos puntos A y B de la recta r de forma que el triángulo PAB sea equilátero.
Como el triángulo es equilátero, la altura por P cae en el punto medio del segmento AB, que es precisamente el punto Q, por tanto dicha altura vale $|\mathbf{PQ}| = (2^2 + (-2)^2 + 2^2)^{(1/2)} = \sqrt{12}$
Como es un triángulo equilátero tenemos que
d(P,A) = d(P,B) = d(A,B)
Fijándonos en el triángulo podemos calcular por Pitágoras el lado a, que es precisamente el lado del triangulo = d(P,A)
$a^2 = 12 + (a/2)^2$, operando se obtiene a = 4
Como A es un punto genérico de la recta r, A(m + 5, m, 1) donde m es un valor cualquiera
PA = (m + 3, m – 1, -2)
d(P,A) = $|\mathbf{PA}| = [(m+3)^2 + (m-1)^2 + 2^2]^{(1/2)}$ = a = 4. Elevando todo al cuadrado nos queda
$(m+3)^2 + (m-1)^2 + 2^2 = 16$. Desarrollando y simplificando $m^2 + 2m - 1 = 0$, cuyas soluciones son:
$m = -1 \pm \sqrt{2}$

Para el signo mas obtenemos el punto A, y para el signo . obtenemos el punto B, luego los tres puntos son
P = (2, 1, 3)
A(4 + $\sqrt{2}$, - 1 + $\sqrt{2}$, 1)
B(4 - $\sqrt{2}$, - 1 - $\sqrt{2}$, 1)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 6 de 1997.

Determina una función f : R $\rightarrow$ R sabiendo que es tres veces derivable, que f ''' (x) = 24x para cada punto x de $\Re$ y que f(0) = 0, f ' (0) = 1 y f '' (0) = 2.

Solución

Por el teorema fundamental del cálculo integral
$f''(x) = \int f'''(x)\,dx = \int 24x\,dx = 12x^2 + K$
Como f '' (0) = 2, sustituyendo queda K = 2, luego $f''(x) = 12x^2 + 2$
$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (12x^2 + 2)\,dx = 4x^3 + 2x + K$
Como f ' (0) = 1, sustituyendo queda K = 1, luego $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$
Finalmente $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (4x^3 + 2x + 1)\,dx = x^4 + x^2 + x + K$
Como f(0) = 0, K = 0, luego la función pedida es $f(x) = x^4 + x^2 + x$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 6 de 1997.

(a) Si el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demuestra que siempre se pierde valor al partirlo en dos trozos..
(b) Como puedes suponer, puede partirse en dos trozos con diferentes pesos de múltiples formas. Determina la partición que origina la máxima pérdida de valor. Razona tu respuesta.

Solución

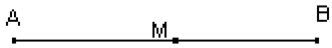
(a)
La función a maximizar es $V = k.p^2$, con la relación x + y = p, de donde y = p –x
$V = kx^2 + ky^2 = kx^2 + k(p-x)^2$
Derivando e igualando a cero
V ' = 2kx + 2k(p-x)(-1) = 4kx – 2kp
V ' = 0, obtenemos x = p/2, de donde y = p/2
Veamos que es un mínimo
V '' = 4k > 0, luego es un mínimo
(b)
Para que la perdida sea máxima, se tiene que dividir el diamante en trozos de igual peso.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 6 de 1997.

Considera los puntos A = (0, 0, 0) y B = (2, 2, 2)
(a) Halla la ecuación del plano que contiene a todos los puntos C que forman con A y B un triángulo equilátero.
(b) Indica que lugar geométrico forman los puntos C descritos en el apartado (a), expresando los elementos que lo determinan

Solución

(a)



Los puntos C están en un plano perpendicular al segmento AB en su punto medio M
AB = (2,2,2)
El plano pasa por el punto M(1,1,1) y tiene como vector normal **n** = **AB** = (2,2,2)
$\Pi \equiv 0 = 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) =$ =. Operando sale x + y +z – 3 = 0
(b)
Los puntos C del apartado anterior están en una circunferencia, en concreto en la intersección del plano obtenido con una esfera.
Vamos a calcularlo
Como el triángulo es equilátero, d(A,C) = d(B,C) = d(A,B)
AB = (2,2,2), luego | **AB** | = $[4 + 4 + 4]^{(1/2)} = \sqrt{12}$
AC = (x,y,z), luego | **AC** | = $[x^2 + y^2 + z^2]^{(1/2)}$
BC = (x-2,y-2,z-2), luego | **BC** | = $[(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2]^{(1/2)}$
Igualando y elevando al cuadrado para quitar las raíces obtenemos
$x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$
Por un lado tenemos $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, que es una esfera de centro (0,0,0) y de radio $\sqrt{12}$

Teniendo en cuenta ese resultado y sustituyendo en $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$ nos resulta $x + y + z = 3$, que era el plano perpendicular al segmento AB en su punto medio.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 6 de 1997.

Resuelve la ecuación matricial AX + 2B = C, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

AX + 2B = C, luego AX = C – 2B, de donde $X = A^{-1}(C - 2B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -5/2 & -17/2 & 9 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$