# OPCIÓN A

**Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1997.**

Considera la función f : R $\rightarrow$ R definida para por la relación $f(x)=\frac{4x^2+3x+4}{x}$

(a) Halla sus asíntotas.
(b) Determina sus extremos locales.
(c) Dibuja la gráfica de f indicando su posición respecto de las asíntotas.

**Solución**

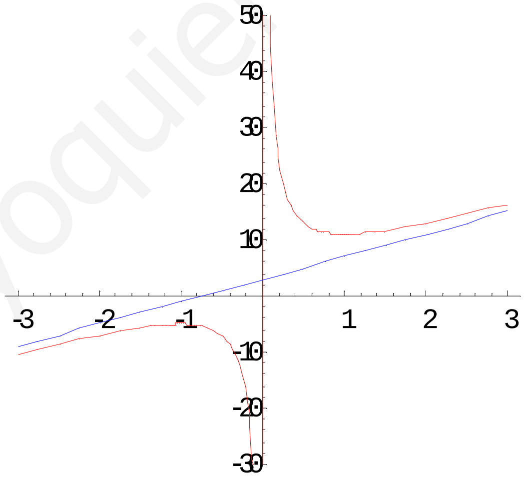
(a)
Como $\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical de f(x).
Como en f(x) el numerador es de un grado mas que el denominador, tiene una asíntota oblicua del tipo y = mx + n con:
$m = \lim_{x\rightarrow +\infty} [f(x) / x] = 4$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{x}=3$$

es decir la asíntota oblicua es y = 4x + 3
(b)
Estudiamos f ' (x), pues sus soluciones son sus posibles máximos o mimos

$$f'(x)=\frac{(8x+3).x-(4x^2+3x+4).1}{x^2}=\frac{4x^2-4}{x^2}$$

f ' (x) = 0, nos da $4x^2 - 4 = 0$, de donde x = ± 1 que son los posibles máximos o mínimos.
Si x < - 1, f ' (x) > 0, luego f(x) es creciente
Si - 1 < x < 1, f ' (x) < 0, luego f(x) es decreciente
Si x > 1, f ' (x) > 0, luego f(x) es creciente.
Por definición x = - 1 es un máximo y x = 1 es un mínimo
(c)
Con los datos anteriores la gráfica de la función es :



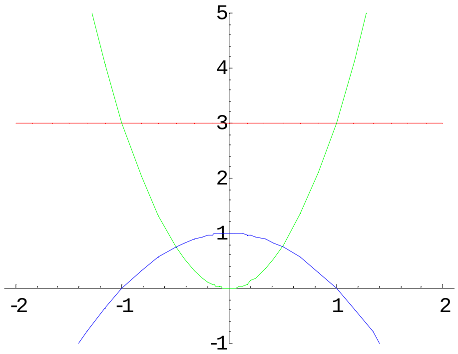

donde la gráfica está en rojo, junto a la asíntota vertical y en azul está la asíntota oblicua

**Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1997.**

(a) Dibuja la región limitada por la recta de ecuación y = 3 y las gráficas de las funciones f y g definidas en todo $\Re$ por $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.
(b) Calcula el área de dicha región.

**Solución**

(a)
y = 3 es una recta paralela al eje de abcisas (en rojo)
$y = 3x^2$ es una parábola como $x^2$ pero mas estrecha (en verde)
$y = 1- x^2$, es un parábola como $x^2$, pero con las ramas hacia abajo y desplazada una unidad hacia arriba en el eje de ordenadas (en azul), por tanto las gráficas de las tres funciones es




(b)
Para calcular el área veo donde se cortan las funciones, para lo cual resolvemos las ecuaciones $3 = 3x^2$ y $3x^2 = 1 - x^2$.
De $3 = 3x^2$, obtenemos como soluciones x = -1/2 , y x = ½, por tanto el área pedida es

$$Area = \int_{-1}^{1}(3-3x^2)dx - \int_{-1/2}^{1/2}(1-x^2-3x^2)dx = \left[3x - x^3\right]_{-1}^{1} - \left[x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} =$$

=[ (3 – 1) – (-3 + 1) ] - [ (1/2 – 4/24 ) - ( -1/2 + 4/24 ) ] = 10 / 3 u. a.

**Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1997.**

Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$ .

**Solución**

$$0 = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & x-2 \\ 2x+1 & 1 & 2x+1 \\ 2x-1 & 3 & 3x-2 \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & x-2 \\ 2 & -2 & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = x.2x.\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$2x^2.(-4x + 2 - 6) = 2x^2. (-4x - 4)$.
Igualando a cero obtenemos x = 0 y x = - 1.

**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1997.**

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A = ( 1, 1, 2 ) y es paralelo a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

**Solución**

El vector director de la recta r es **v** = (-1,1,2)

El vector director de la recta s es **w** = (2,-1,1)x(-1,1,3) = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = **i**(-4) – **j**(7) + **k**(1) = (-4,-7,1)

Por tanto el plano pedido pasa por el punto A = (1,1,2) y es paralelo a los vectores **v** = (-1,1,2) y **w** = (-4,-7,1), luego su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(15) - (y-1)(7) + (z-2)(11) = 15x - 7y + 11z - 30 = 0.$$

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1997.**

(a) Describe el método de integración por partes.

(b) Calcula $\int_1^e [Ln(x)]^2 dx$

(Nota: Ln(x) es el logaritmo neperiano de x.)

**Solución**

(a) El método de integración por partes nos dice que si u(x) y v(x) tienen derivada continua entonces

$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$

(b) Calculamos primero la integral indefinida

Tomamos u = $[\ln(x)]^2$, y dv = dx, de donde du = 2ln(x).(1/x).dx y v = $\int$ dx = x, por tanto

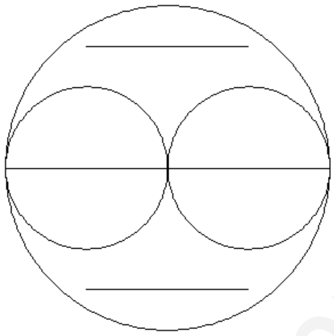
$\int [\ln(x)]^2 dx = x.[\ln(x)]^2 - \int x.2\ln(x).(1/x)\,dx = x.[\ln(x)]^2 - 2\int \ln(x)\,dx = x.[\ln(x)]^2 - 2.(x.\ln(x) - x)$

Por tanto

$\int_1^e [Ln(x)]^2\,dx = \left[x(\ln(x))^2 - 2(x\ln(x) - x)\right]_1^e$ = [ ( e.1 – 2(e.1 – e)) – (1.0 – 2(1.0 –1)) ] = e – 2.

## Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1997.

Dada una circunferencia de radio r, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior ( la región rayada en la figura)



### Solución

Dividimos el diámetro 2r en dos partes x e y, con lo cual x + y = 2r

La función a optimizar es A = $\Pi.r^2 - \Pi.(x/2)^2 - \Pi.(y/2)^2$. Como y = 2r – x, tenemos

A = $\Pi.r^2 - \Pi/4.(x)^2 - \Pi/4.(2r - x)^2$. Derivándola tenemos

A ' = 0 - $\Pi$/4.(2x) - $\Pi$/4.[2.(2r – x)].( - 1) = - $\Pi$x + $\Pi$r.

Igualando a cero

A ' = 0, nos da $\Pi$x = $\Pi$r, de donde x = r, y = 2r – r = r. Por tanto las dos circunferencias tienen el mismo radio que es la mitad del diámetro original.

Veamos que efectivamente es un máximo,

A '' = - $\Pi$/2 - $\Pi$/2 < 0, por tanto es un máximo.

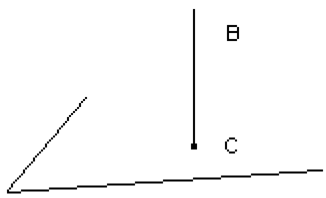
## Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1997.

(a) Halla el punto C que es la proyección ortogonal del punto B = ( 2, 1, 1 ) sobre el plano $\Pi$ : 2x+y-2z = - 6

(b) Halla el punto A que esté sobre el eje OX y tal que el área del triángulo ABC valga 6. ¿ Cuantas soluciones existen?

### Solución

(a)




B(2,1,1)

$\Pi \equiv 2x + y - 2z + 6 = 0$, con lo cual su vector normal es **n** = (2,1,-2)

r es la recta perpendicular al plano $\Pi$ que pasa por el punto B, por tanto su vector director **v** = **n**, y su ecuación será:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} = \lambda$$

que en vectorial sería (x,y,z) = $(2+2\lambda, 1+\lambda, 1-2\lambda)$

C es el punto de intersección de la recta r con el plano $\Pi$, por tanto

0 = $2.(2+2\lambda) + (1+\lambda) - 2(1-2\lambda) = 9\lambda + 9$, de donde $\lambda = -1$ con lo cual el punto C es

C = (2 + 2(-1), 1 + (-1), 1 –2.(-1) ) = ( 0,0,3)
(b)
Como el punto A está en el eje OX es de la forma A = (x,0,0)
El área del triángulo ABC es ½.|**AB**x**AC**| = 6
**AB** = (2 – x,1,1); **AC** = (0 –x, 0, 3), de donde

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2-x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(6 - 3x + x) + \mathbf{k}(x) = (3,2x-6,x)$$

$$Area = 6 = \frac{1}{2}\sqrt{9+(2x-6)^2+x^2}$$

Operando y pasando todo a un miembro obtenemos $5x^2 - 24x - 99 = 0$, y resolviendo esta ecuación de segundo grado nos salen dos soluciones: $x_1 = \frac{24+\sqrt{2556}}{10}$ y $x_2 = \frac{24-\sqrt{2556}}{10}$

### Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1997.

Escribe cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:
(a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones..
(b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.
(c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.
(b) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.
Razona en cada caso, tu respuesta

### Solución

(a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones..
y = 2x + 1; 2y = 4x + 2; 3y = 6x +3
lo que se ha hecho es poner la misma ecuación pero multiplicada por un parámetro distinto que no sea cero

(b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.
La única forma de hacerlo es poner como coeficiente de una de las incógnitas 0
x + 0.y = 1; 0.y + z = 1 , pero no es determinado pues y toma cualquier valor

(c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.
x + 0y + 0z = 0; 0x +y + 0z = 0; 0x + y + 0z = 1.
El rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, por tanto es incompatible.

(b) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.
x = 1, y = 1, z = 1.