

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

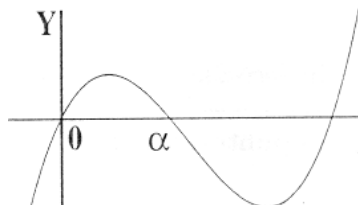
(a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.

(b) [1 punto] Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$



Solución

(a) $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt \neq 0$ porque nos daría el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX entre $x = 0$ y $x = \alpha$

$F'(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$, según el teorema fundamental del cálculo integral, luego $F'(\alpha) = f(\alpha)$ y según la gráfica se observa que $f(\alpha) = 0$.

F es creciente en $(0, \alpha)$ si y solo si $F'(x) > 0$ en $(0, \alpha)$, pero $F'(x) = f(x)$ que es mayor que cero en $(0, \alpha)$, luego $F(x)$ es creciente en dicho intervalo.

(b) $F(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \left[2\sqrt{t+1} \right]_0^1 = (2\sqrt{2}) - (2\sqrt{1}) = 2(\sqrt{2} - 1)$

Cambio $t + 1 = x^2$

$dt = 2x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2}} dx = \int \frac{2x}{x} dx = \int 2 dx = 2x = (\text{quito cambio}) = 2\sqrt{t+1}$$

Ejercicio 2 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ para $x \neq 1$

(a) [1'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $x = 1$ es una A.V. de f

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Tiene una A.O. $y = mx + n$ porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x + 2}{x - 1} \right) = 1. \text{ luego la A.O. es } y = mx + n = 2x + 2. \text{ Se puede hacer}$$

rápidamente dividiendo numerador entre denominador

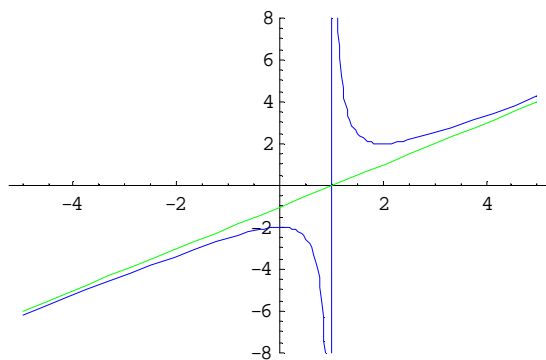
$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ - x^2 + x \\ \hline -x + 2 \\ +x - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Veamos la posición relativa

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x-1)) = 0^+$, luego $f(x)$ está por encima de la A.O: en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-1)) = 0^-$, luego $f(x)$ está por debajo de la A.O: en $+\infty$

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 3 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Solución

$|A| = 2(2) - t(t - 3) + 0 = -t^2 + 3t + 4$, que es una función cuadrática. Es decir $|A| = f(t) = -t^2 + 3t + 4$

$t^2 - 3t - 4 = 0$; $t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, luego las soluciones son $t = -1$ y $t = 4$, es decir la función dada es

- $f(t)$ si $-\infty < t < -1$, puesto que $f(-2) = -6 < 0$

+ $f(t)$ si $-1 < t < 4$, puesto que $f(0) = 4 > 0$

- $f(t)$ si $4 < t < +\infty$, puesto que $f(5) = -36 < 0$

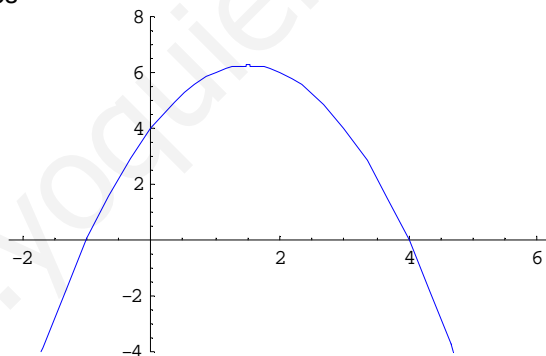
Por tanto el determinante es positivo si $t \in (-1, 4)$

$|A| = f(t) = -t^2 + 3t + 4$ tiene por gráfica una parábola con las ramas hacia abajo, por tanto su máximo anula la 1ª derivada y hace negativa la 2ª derivada. Veámoslo

$f'(x) = -2t + 3$; $f'(x) = 0$ nos da $-2t + 3 = 0$ de donde $x = 3/2 = 1'5$

$f''(x) = -2 < 0$, luego $x = 1'5$ es un máximo que vale $f(1'5) = -(1'5)^2 + 3(1'5) + 4 = 6'25 = 25/4$

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio 4 de la Opción A de septiembre, modelo 3 de 2002

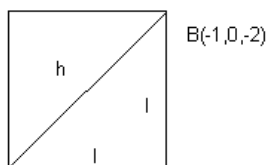
Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.

(a) [1 punto] Calcula el área del cuadrado.

(b) [1'5 puntos] Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

Solución

(a)



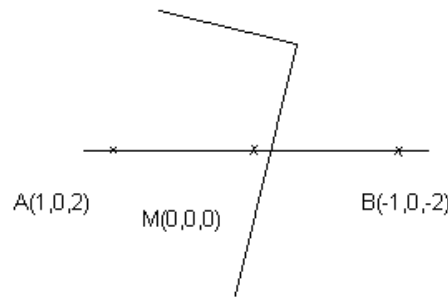
$A(1,0,2)$

$\overline{AB} = (-2, 0, -4)$

$h^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 = \|\overline{AB}\|^2 = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$$\text{Área} = l^2 = \frac{h^2}{2} = \frac{(\sqrt{20})^2}{2} = 10 \text{ u.a.}$$

(b)



El plano que me piden pasa por el punto medio del segmento $M(0,0,0)$ y tiene como vector normal $\mathbf{n} = \overline{AB} = (-2,0,-4)$

El plano pedido es $\pi \equiv (-2)(x - 0) + (0)(y - 0) + (-4)(z - 0) = 0$. Operando queda $\pi \equiv x + 2z = 0$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases} . \text{ Calcula su derivada}$$

Solución

$3 + x^2$ siempre es positivo luego $\sqrt{3+x^2}$ siempre tiene sentido y la podemos derivar en $(0,1)$
 $1/x$ no existe para $x = 0$, pero podemos derivarla en $(1, +\infty)$. Nos faltaría después estudiar la derivada en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases} . \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{x}{2} \right) = -1 + 1/2 = -1/2.$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 \right) = \frac{2}{\sqrt{4}} - 1 = 0.$$

Como $f'(1^-) = -1/2 \neq f'(1^+) = 0$, no existe $f'(1)$, por tanto la función es derivable en $(0, +\infty) - \{1\}$

Ejercicio 2 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx$

Solución

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador tenemos que efectuar la división

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 1 \quad | \quad x^2 - x - 2 \\ -3x^3 + 3x^2 + 6x \quad | \quad 3x + 3 \\ \hline 3x^2 + 6x + 1 \\ -3x^2 + 3x + 6 \\ \hline 9x + 7 \end{array}$$

$$I = \int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx = \int \left(3x + 3 + \frac{9x+7}{x^2-x-2} \right) dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{9x+7}{x^2-x-2} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x+1} dx = \frac{25}{3} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1|$$

$x^2 - x - 2 = 0$. Se resuelve y sale $x = 2$ y $x = -1$, por tanto $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$$\frac{9x+7}{x^2-x-2} = \frac{9x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Para $x = -1 \rightarrow -2 = B(-3) \rightarrow B = \frac{2}{3}$; Para $x = 2 \rightarrow 25 = A(3) \rightarrow A = \frac{25}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2} dx &= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{3}{2} + 3 + \frac{25}{3} \ln(1) + \frac{2}{3} \ln(2) \right) - \left(0 + 0 + \frac{25}{3} \ln(2) + \frac{2}{3} \ln(1) \right) = \\ &= \frac{3}{2} + 3 + \frac{2}{3} \ln(2) - \frac{25}{3} \ln(2) = \frac{9}{2} - \frac{23}{3} \ln(2) \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x+3y+z = 3 \\ 2x+my+z = m \\ 3x+5y+mz = 5 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.

(b) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.

(c) [0'5 puntos] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

Solución

$$\begin{cases} x+3y+z = 3 \\ 2x+my+z = m \\ 3x+5y+mz = 5 \end{cases}; \text{ matriz de los coeficientes } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}; \text{ matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & m & 1 & m \\ 3 & 5 & m & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1(m^2 - 5) - 3(2m - 3) + 1(10 - 3m) = m^2 - 9m + 14.$$

Resolvemos $m^2 - 9m + 14 = 0$ y sus soluciones son $m = 2$ y $m = 7$.

Si $m \neq 2$ y $m \neq 7$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado, es decir tiene solución única.

Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ tenemos que } \text{rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener dos columnas iguales resulta que } \text{rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

Si $m = 7$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ tenemos que } \text{rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener dos columnas iguales resulta que } \text{rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

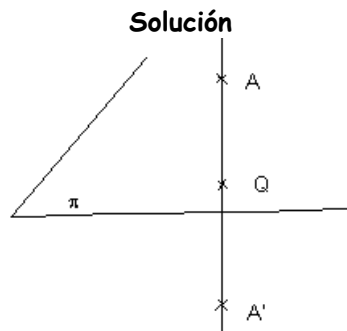
No hay ningún valor de m para que el sistema no tenga solución

Ejercicio 4 de la Opción B de septiembre, modelo 3 de 2002.

Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1, -4, 2)$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A .

(b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto de π .



$\pi \equiv x - y + 2z = 3$, su vector normal es $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$

La recta que pasa por A y es perpendicular a π , tiene por punto A(-1,-4,2) y como vector director \mathbf{v} el normal $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$

La recta es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

(b)

Para calcular el simétrico de A se obtiene el punto Q intersección de la recta r con el plano π . El punto Q es el punto medio del segmento AA', siendo A' el simétrico buscado.

$$Q = r \cap \pi$$

$$(-1 + \lambda) - (-4 - \lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 3. \text{ Operando } 6\lambda = -4, \text{ de donde } \lambda = -2/3$$

$$Q(-1 - 2/3, -4 + 2/3, 2 - 4/3) = Q(-5/3, -10/3, 2/3)$$

Q es el punto medio del segmento AA' luego $(-5/3, -10/3, 2/3) = [(x-1)/2, (y-4)/2, (z+2)/2]$. Igualando tenemos

$$(x-1)/2 = -5/3 \text{ de donde } x = -7/3$$

$$(y-4)/2 = -10/3 \text{ de donde } y = -8/3$$

$$(z+2)/2 = 2/3 \text{ de donde } z = -2/3$$

El simétrico A' (-7/3, -8/3, -2/3)