Opción A

Ejercicio 1 de la opción A de septiembre de 2003. Modelo 1

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \to 0}$ [Ln(1+x) – senx]/[x.senx], siendo Ln(1+x) el logaritmo neperiano de 1+x

Solución

$\lim_{x \to 0}$ [Ln(1+x) – senx]/[x.senx] = [Ln(1+0) – sen0]/[0.sen0] = 0/0, la aplicamos la regla de L'Hôpital que dice si $\lim_{x \to 0}$ f(x) / g(x) = 0/0 y existe $\lim_{x \to 0}$ f '(x) / g '(x) entonces $\lim_{x \to 0}$ f(x) / g(x) = $\lim_{x \to 0}$ f '(x) / g '(x)

$\lim_{x \to 0}$ [Ln(1+x) – senx]/[x.senx] = $\lim_{x \to 0}$ [1/(1+x) – cosx] / [senx +x.cosx] =

= [1/(1+0) – cos0] / [sen0 +0.cosx] = (1-1)/0 = 0/0. Le volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \to 0}$ [1/(1+x) – cosx] / [senx +x.cosx] = $\lim_{x \to 0}$ [-1/(1+x)^2 + senx] / [cosx + cosx - x.senx] =

= [-1/(1+0)^2 + sen0] / [cos0 + cos0 - 0.sen0] = -1/(1+1) = -1/2

Ejercicio 2 de la opción A de septiembre de 2003. Modelo 1

Sea f : $\Re \to \Re$ la función definida por f(x) = e $^{x/3}$.

(a) [1 punto] ¿En que punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Solución

f(x) = e $^{x/3}$

(a)

La recta tangente en x = a es y – f(a) = f '(a).(x – a)

f(x) = e $^{x/3}$ $\to$ f(a) = e $^{a/3}$

f '(x) = (1/3).e $^{x/3}$ $\to$ f '(a) = (1/3).e $^{a/3}$

La recta tangente es y – e $^{a/3}$ = (1/3).e $^{a/3}$.(x – a)

Como dicen que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas (0,0) tenemos que

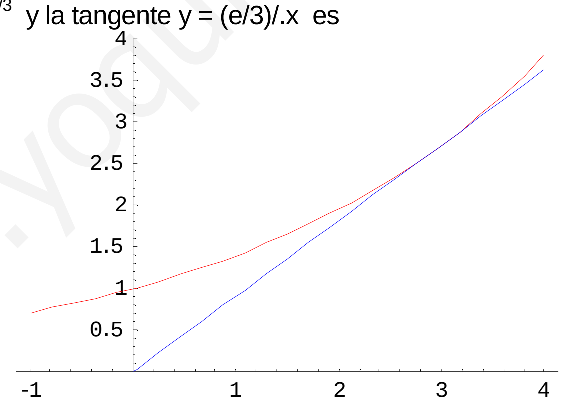
0 – e $^{a/3}$ = (1/3).e $^{a/3}$.(0 – a) $\to$ -1 = (1/3).(- a) $\to$ a = 3

Luego el punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas es a = 3 y la recta tangente es y – e $^{3/3}$ = (1/3).e $^{3/3}$.(x – 3). Operando queda y = (e/3)/.x

(b)

La gráfica de e ^{x} es conocida porque es la exponencial pero un poco mas abierta. Cuando x = 3, f(3) = e

La gráfica conjunta de f(x) = e $^{x/3}$ y la tangente y = (e/3)/.x es



El área pedida es Área = $\int_0^3$ [e $^{x/3}$ - (e/3).x] dx = [3.e $^{x/3}$ - (e/6).x^2]$_0^3$ =

= [(3.e $^{3/3}$ - (e/6).9) - (3.e ^{0} - (e/6).0)] = (3/2).e – 3 unidades de área (u.a.)

Ejercicio de la opción A de septiembre de 2003. Modelo 1

Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] ¿Para que valores de m tiene solución la ecuación matricial A.X + 2B = 3C?

(b) [1'25 puntos] Resuelve la ecuación matricial dada para m = 1.

Solución

(a)

AX + 2B = 3C $\to$ AX = 3C – 2B

Si existiese A $^{-1}$, multiplicando por la izquierda la expresión AX = 2B – 3C tendremos

$A^{-1}. AX = A^{-1}. (3C - 2B) \rightarrow X = A^{-1}. (3C - 2B)$
Para que exista A^{-1} su determinante tiene que ser distinto de cero

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m$, porque el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal. Por tanto el sistema $A.X + 2B = 3C$ tiene solución si solo si $m \neq 0$.

(b)
Si m = 1
$X = A^{-1}. (2B - 3C)$

$$(3C - 2B) = 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ (A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = A^{-1}. (2B - 3C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio de la opción A de septiembre de 2003. Modelo 1

Se sabe que los puntos A(1,0,-1), B(3,2,1) y C(-7,1,5) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.
(a) [1 punto] Calcula las coordenadas del punto D
(b) [1'5 puntos] Halla el área del paralelogramo.

Solución

(a)

Si ABCD es un paralelogramo, los vectores **AB** y **DC** tienen las mismas coordenasdas, porque son igulaes como vectores libres.
AB = (2,2,2)
DC = (-7-x, 1-y, 5-z)
Igualando (2,2,2) = (-7-x, 1-y, 5-z), de donde x = -9, y = -1 y z = 3. El punto es D(-9, -1, 3)
(b)
Sabemos que el área de u un paralelogramo es el módulo del producto de dos vectores con origen común, luego Área = || **AB** x **AC**|| = $\sqrt{[(10^2 + 28^2 + 18^2)]} = \sqrt{(1208)}$ unidades de área (u.a.)
AB = (2,2,2); **AD** = (-10,-1,4)

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(10) - \mathbf{j}(28) + \mathbf{k}(18) = (10, -28, 18)$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B de septiembre de 2003. Modelo 1

[2'5 puntos] Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = (x-1).Ln(x)$, donde Ln(x) es el logaritmo neperiano de x. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, -3/2).

Solución

Una primitiva de f(x) es $F(x) = \int f(x)\,dx + K$
$\int f(x)\,dx = \int [(x-1).Ln(x)]\,dx$ que es una integral por partes
$u = Ln(x) \rightarrow du = (1/x)\,dx$
$dv = (x-1)\,dx \rightarrow v = \int (x-1)\,dx = (x^2)/2 - x$
$\int [(x-1).Ln(x)]\,dx = [(x^2)/2 - x].Ln(x) - \int [(x^2)/2 - x].(1/x)\,dx =$
$= [(x^2)/2 - x].Ln(x) - \int [(x/2) - 1]\,dx = [(x^2)/2 - x].Ln(x) - [(x^2/4) - x]$

La primitiva es $F(x) = [(x^2)/2 - x].Ln(x) - [(x^2/4) - x] + K$
Como pasa por el punto (1, -3/2) tenemos que F(1) = -3/2
$-3/2 = = [(1)/2 - x].Ln(1) - [(1/4) - 1] + K = 3/4 + K$ de donde $K = -3/2 – 3/4 = -9/4$
La primitiva pedida es $F(x) = [(x^2)/2 - x].Ln(x) - [(x^2/4) - x] – 9/4$

Ejercicio 2 de la opción B de septiembre de 2003. Modelo 1

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$.

Solución

Hay que estudiar la derivabilidad en x = 1, x = -1 y x = 0 porque sabemos que |x| no es derivable en x = 0.
Utilizaremos que si una función es derivable en una punto tiene que ser continua en dicho punto.
f(x) es contina en x = a si y solo si $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$
Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x /1 - |x|) = (1^+ /1 - |1^+|) = (1^+/0^-) = -\infty$, luego en x = 1 la función no es continua y por tanto no es derivable en x = 1.
Como $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x /1 - |x|) = (-1^+ /1 - |-1^+|) = (-1^+/0^+) = -\infty$, luego en x = -1 la función no es continua y por tanto no es derivable en x = -1.
$f(0) = (0 /1 - |0|) = 0/1 = 0$
$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x /1 - |x|) = (0 /1 - |0|) = 0/1 = 0$
Como $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, f(x) es continua en x = 0
Veamos la derivabilidad en x = 0, es decir si $f'(0^-) = f'(0^+)$
$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} [f(0+h) – f(0)] / h = \lim_{h\to 0^-} f(h) / h = \lim_{h\to 0^-} [(h /1 - |h|)] / h = \lim_{h\to 0^-} (1 /1 - |h|) = 1/1 = 1$
$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} [f(0+h) – f(0)] / h = \lim_{h\to 0^+} f(h) / h = \lim_{h\to 0^+} [(h /1 - |h|)] / h = \lim_{h\to 0^+} (1 /1 - |h|) = 1/1 = 1$
Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, existe $f'(0) = 1$. Luego f(x) es derivable en $\Re - \{-1,1\}$
Aunque no la piden vamos a calcular la derivada de f(x)

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 de la opción B de septiembre de 2003. Modelo 1

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.
(b) [1'25 puntos] Resuelve el sistema A.X = 3X e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

Solución

(a)

$$A + \lambda.I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $A + \lambda.I$ no tenga inversa su determinate ha de ser 0, es decir $|A + \lambda.I| = 0$

$$|A + \lambda.I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \{\text{desarrollo por los adjuntos de la 1ª fila}\}$$

$= (-2+\lambda).[(1+\lambda).(-2+\lambda) - 4] – (-2).[(-2). (-2+\lambda) – (-2)] + (1).[4 – 1. (1+\lambda)] =$
$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27$

$|A + \lambda.I| = 0 \rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$

Le aplicamos Ruffini a $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27$ para calcular sus raices

	1	-3	-9	27
3		3	0	-27
	1	0	-9	0

Luego $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda - 3).(\lambda^2 - 9) = (\lambda - 3).(\lambda - 3).(\lambda + 3) = 0$. Es decir la matriz $A + \lambda.I$ no tiene inversa si $\lambda = 3$ o $\lambda = -3$.

(b)

A.X = 3X = 3.I.X, siendo I la matriz idebntidad de orden 3

$A.X = 3.I.X \rightarrow A.X - 3.I.X = O$, siendo O la matriz nula

$$A.X - 3.I.X = (A - 3.I).X = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el 3 era una de las soluciones el determinante del sistema homogéneo es 0.

En la matriz $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, el rango es 2 luego nos quedamos solo con dos ecuaciones y dos incógnitas principales para resolverlo. Tomo las dos ultimas ecuaciones

Desarrollando $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e igualando miembro a miembro tenemos el sistema

$-5x-2y+z = 0$
$-2x-2y-2z = 0$
$x-2y-5z = 0$

Las dos ultimas ecuaciones son

$x-2y-5z = 0 \qquad \rightarrow \qquad x-2y-5z = 0$

$-2x-2y-2z = 0$ { 2ª + 1ª(2)} $\rightarrow$ $-6y - 12z = 0$, de donde $y = -2z$ y $x = z$. Tomando $z = \lambda$ la solución del sistema es $(x,y,z) = (\lambda,-2\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \Re$.

Geométricamente me está diciendo que los tres planos se cortan en una recta que pasa por el origen de coordenadas y que los tres planos son distintos porque al comparar sus coeficientes dos a dos vemos que no son proporcionales.

Ejercicio 4 de la opción B de septiembre de 2003. Modelo 1

[2'5 puntos] Los puntos A(1,1,0) y B(2,2,1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

Solución

A(1,1,0) y B(2,2,1) luego el tenemos el vector **AB** = (1,1,1)

Como ABCD es un rectángulo y los puntos C y D están en la recta que pasa por el origen, un vector directodr de dicha recta es **AB** = (1,1,1) y además pasa por (0,0,0), luego su ecuación en paramétricas sería

$\{ x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda \}$

Como ABCD es un rectángulo los vectores **AB** y **AD** son perpendiculares y su producto escalar es cero, es decir **AB•AD** = 0

AB = (1,1,1), **AD** = $(\lambda -1, \lambda -1, \lambda -1)$. Tomando como coordenadas de $D(\lambda,\lambda,\lambda)$ puesto que está en la recta que pasa por el origen de coordenadas.

AB•AD = 0 = (1,1,1) $\bullet(\lambda -1, \lambda -1, \lambda) = \lambda -1 + \lambda -1 + \lambda = 3\lambda -2 = 0$ de donde $\lambda = 2/3$ y el punto es D(2/3,2/3,2/3)

Como ABCD es un rectángulo los vectores **AB** y **BC** son perpendiculares y su producto escalar es cero, es decir **AB•BC** = 0

AB = (1,1,1), **BC** = $(\lambda -2, \lambda -2, \lambda -1)$. Tomando como coordenadas de $C(\lambda,\lambda,\lambda)$ puesto que está en la recta que pasa por el origen de coordenadas.

AB•BC = 0 = (1,1,1) $\bullet(\lambda -2, \lambda -2, \lambda -1) = \lambda -2 + \lambda -2 + \lambda -1 = 3\lambda -5 = 0$ de donde $\lambda = 5/3$ y el punto es C(5/3,5/3,5/3)