

Opción A

Ejercicio n.º 1 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

(a) [0'75 puntos] Estudia la derivabilidad de f .

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

(c) [0'75 puntos] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ teniendo en cuenta la definición de } |x|$$

$x^2 - x$ es una función continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x > 0$

$x^2 + x$ es una función continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x < 0$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$, es decir si verifica

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y por tanto en todo \mathbb{R} .

Estudiamos ya la derivabilidad de $f(x)$, en particular en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en $x = 0$, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = +1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$ por lo cual es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

(b) y (c)

$$\text{Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada } f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si $x > 0$, $f'(x) = 2x - 1$. Resolvemos $f'(x) = 0$ y veremos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

$f'(x) = 0$, nos da $2x - 1 = 0$, de donde $x = 1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.

Como $f'(0^+) = -0'8 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, 1/2)$.

Como $f'(1) = 1 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(1/2, +\infty)$.

Por definición $x = 1/2$ es un mínimo relativo que vale $f(1/2) = (1/2)^2 - |1/2| = -1/4$

Si $x < 0$, $f'(x) = 2x + 1$.

$f'(x) = 0$, nos da $2x + 1 = 0$, de donde $x = -1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.

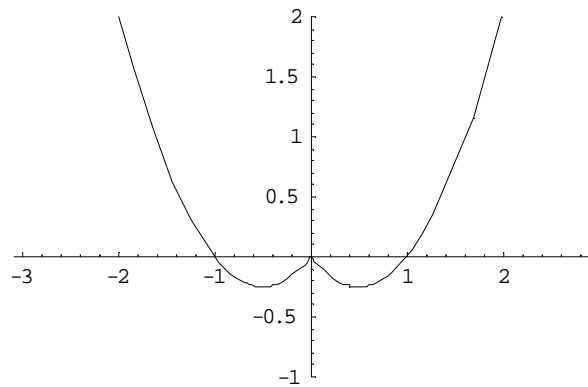
Como $f'(-1) = -1 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, -1/2)$.

Como $f'(-0'1) = 0'8 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(-1/2, 0)$.

Por definición $x = -1/2$ es un mínimo relativo que vale $f(-1/2) = (-1/2)^2 - |-1/2| = -1/4$

Por definición como en $(-1/2, 0)$, $f(x)$ es estrictamente creciente y en $(0, 1/2)$, $f(x)$ es estrictamente decreciente, $x = 0$ es un máximo relativo que vale $f(0) = 0$. (Obsérvese que en $x = 0$ la función no tiene derivada).

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de la función es



Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Calcula

(a) [1'5 puntos] $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx$

(b) [1 punto] $\int (2x - 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx$, siendo tg la función tangente.

Solución

(a)

$I = \int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx$ es un integral racional con el numerado de igual grado que el denominador, por tanto tenemos que efectuar previamente la división.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - x - 160 & x^2 - 25 \\ \hline -5x^2 + 125 & 5 \\ \hline -x - 35 & \end{array}$$

Con lo cual $\frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} = 5 + \frac{-x - 35}{x^2 - 25}$

$$I = \int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx = \int 5 dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25} dx = 5x + I_1$$

$$I_1 = \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25} dx = \int \frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)} dx = \int \frac{A}{x - 5} dx + \int \frac{B}{x + 5} dx =$$

$$= A \operatorname{Ln}|x - 5| + B \operatorname{Ln}|x + 5|, \text{ donde } \operatorname{Ln} \text{ es el logaritmo neperiano.}$$

Por tanto la integral pedida es $I = 5x + I_1 = 5x + A \operatorname{Ln}|x - 5| + B \operatorname{Ln}|x + 5| + K$. Solo nos falta calcular las constantes A y B.

$$\frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)}$$

Igualando numeradores tenemos

$$-x - 35 = A(x + 5) + B(x - 5)$$

Para $x = 5$ tenemos $-40 = 10A$, de donde $A = -4$

Para $x = -5$ tenemos $-30 = -10B$, de donde $B = 3$

Luego $I = 5x - 4 \operatorname{Ln}|x - 5| + 3 \operatorname{Ln}|x + 5| + K$

(b)

$\int (2x - 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx$, siendo tg la función tangente.

Recordamos que $\int \operatorname{tg}(t) dt = \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} dt = -\operatorname{Ln}|\cos(t)| + K$

Hacemos el cambio de variable $t = x^2 - 3x$, con lo cual $dt = (2x - 3)dx$

$$\int (2x - 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx = \int \operatorname{tg}(t) dt = -\operatorname{Ln}|\cos(t)| + K = (\text{quitando el cambio}) =$$

$$= -\operatorname{Ln}|\cos(x^2 - 3x)| + K$$

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x - y - z = -1$$

$$x + \lambda y + z = 4$$

$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Solución

$$\lambda x - y - z = -1$$

$$x + \lambda y + z = 4$$

$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el $\det(A) = |A|$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a C + 1^a C(-1) \\ 3^a C + 1^a C(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollamos por el adjunto 31}) =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(-1-\lambda) = (\lambda-1)(1+\lambda)$$

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $(\lambda-1)(1+\lambda) = 0$, de donde $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } \lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a C + 1^a C(1) \\ 3^a C + 1^a C(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A^*) = 3$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\text{Si } \lambda = -1, A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos filas proporcionales, tenemos } \text{rango}(A^*) = 2$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Nuestro sistema es

$$2x - y - z = -1$$

$$x + 2y + z = 4$$

$$x + y + z = 4$$

Sumando 1ª y 3ª tenemos $3x = 3$, de donde $x = 1$. Tomamos la 1ª y la 2ª con $x = 1$

$$2 - y - z = -1$$

$$1 + 2y + z = 4$$

Sumándolas tenemos $3 + y = 3$, de donde $y = 0$.

Sustituyendo $x = 1$ e $y = 0$ en cualquier ecuación tenemos $z = 3$, por tanto la solución del sistema es $(x,y,z) = (1, 0, 3)$ cuando $\lambda = 2$

También se puede hacer por Cramer (Vicente Serrano)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10+13}{3} = 1; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11+2+4-8}{3} = 3$$

Y como vemos se obtiene la misma solución $(x,y,z) = (1, 0, 3)$ cuando $\lambda = 2$.

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π

de ecuación $x + z = 1$ y del plano π' de ecuación $y - z = 3$.

Solución

Pasamos la recta a vectorial. $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 3}{2} = a \end{cases}$, siendo "a" un parámetro, por tanto la

ecuación de la recta en vectorial es $(x, y, z) = (0, 1 + a, 3 + 2a)$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta $P(0, 1+a, 3+2a)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π' , tenemos que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$

$$d(P, \pi) = \frac{|0+2a+3-1|}{\sqrt{2}}; \quad d(P, \pi') = \frac{|a+1-2a-3-3|}{\sqrt{2}}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando tenemos $|2a+2| = |-a - 5|$, de donde salen las ecuaciones $2a+2 = -a - 5$ y $2a+2 = a+5$.

De $2a+2 = -a - 5$, operando sale $a = -7/3$ y un punto es $P(0, 1-7/3, 3-14/3) = P(0, -4/3, -5/3)$

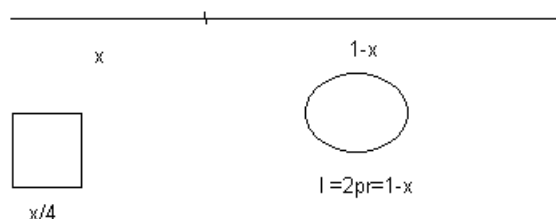
De $2a+2 = a + 5$, operando sale $a = 3$ y el otro punto es $P'(0, 1+3, 3+2(3)) = P'(0, 4, 9)$

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Solución



El área del cuadrado es $S_1 = (x/4)^2 = x^2/16$

La longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r = 1 - x$, de donde $r = (1-x)/2\pi$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi[(1-x)/2\pi]^2 = (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1)$

La función a optimizar es la suma de las áreas

$$S(x) = S_1 + S_2 = x^2/16 + (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1) = (1/16\pi)(\pi x^2 + 4x^2 - 8x + 4)$$

Calculamos la 1ª derivada $S'(x)$, la igualamos a 0, calculamos la 2ª derivada para ver que efectivamente es un mínimo.

$$S'(x) = (1/16\pi)(2\pi x + 8x - 8)$$

$S'(x) = 0$, de donde $(2\pi x + 8x - 8) = 0$, y resolviéndolo sale $x = 4/(\pi+4)$, que será el posible mínimo.

$S''(x) = (1/16\pi)(2\pi + 8)$, de donde $S''(4/(\pi+4)) = (1/16\pi)(2\pi + 8) > 0$, por tanto $x = 4/(\pi+4)$ es un mínimo.

Los trozos en que se ha dividido el alambre tienen de longitud " x " = $4/(\pi+4)$ y " $1 - x$ " = $1 - 4/(\pi+4) = \pi/(\pi+4)$, para que las sumas de las áreas sea mínima.

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Halla la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Solución

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$.

El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, con $x \in [a, b]$ es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

En nuestro caso $f'(x) = \int f''(x) dx$ y también $f(x) = \int f'(x) dx$.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (12x - 6) dx = 6x^2 - 6x + M$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 6x + M) dx = 2x^3 - 3x^2 + Mx + N$$

Veamos cuanto valen las constantes M y N .

Como la recta $y = 4x - 7$ es la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$, sabemos que $f'(2) = 4$ que es la pendiente de la recta tangente.

Además como $y = 4x - 7$ es la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$, en $x = 2$ coinciden la ordenada de la función y la de la recta tangente, es decir $f(2) = y(2)$

$$\text{De } f'(2) = 4$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + M$$

$$4 = f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + M, \text{ con lo cual } M = -8$$

$$4 = f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + M, \text{ con lo cual } M = -8$$

$$\text{De } f(2) = y(2)$$

$$y(2) = 4(2) - 7 = 1$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 8(2) + N$$

$$\text{Igualando } f(2) = y(2) \text{ tenemos } 1 = 16 - 12 - 16 + N, \text{ con lo cual } N = 13$$

La función pedida es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB^t X = -2C$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = M; \quad -2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = N$$

Por tanto la ecuación $AB^t X = -2C$ se nos ha transformado en $MX = N$ con $M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 30 = -28 \neq 0$, la matriz M tiene inversa M^{-1} , y podemos multiplicar por

la izquierda la ecuación $MX = N$ por la matriz inversa de M , M^{-1} ,
 $M^{-1} \cdot MX = M^{-1} \cdot N$, es decir $X = M^{-1} \cdot N$

Recordamos que $M^{-1} = (1/|M|) \cdot \text{Adj}(M^t)$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad M^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} = (1/|M|) \cdot \text{Adj}(M^t) = (1/-28) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ 5/14 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$

(a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A , B y C , donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y - 1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C ?

Solución

(a)



$A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$

Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\mathbf{AB} = 3\mathbf{AM}$

$$\mathbf{AB} = (-3,3,3)$$

$$\mathbf{AM} = (x-1, y, z+2)$$

De $\mathbf{AB} = 3\mathbf{AM}$ obtenemos $(-3,3,3) = (3x-3, 3y, 3z+6)$, e igualando miembro a miembro se tiene $x = 0$, $y = 1$ y $z = -1$, es decir el punto M es $M(x,y,z) = M(0,1,-1)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir

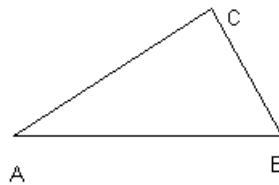
$$N(x,y,z) = N(-2/2, (1+3)/2, (-1+1)/2) = N(-1,2,0)$$

(b)

Antes de calcular el área del triángulo de vértices A , B y C ponemos la recta r en forma continua ¡¡cuidado, pues no me la han dado en forma continua!!

$-x = y - 1 = z$ en forma continua es $x/(-1) = (y-1)/1 = z/1$.

Un punto de la recta es $C(0,1,0)$ y un vector director de la recta es $\mathbf{u} = (-1,1,1)$



Recordamos que el área del triángulo es $1/2$ del área del paralelogramo que determinan los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} , y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$$

$$\mathbf{AB} = (-3,3,3)$$

$$\mathbf{AC} = (-1,1,2)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}(3) - \bar{j}(-3) + \bar{k}(0) = (3,3,0)$$

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \text{ u}^2$$

Para responder a la pregunta ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C? hay que recordar también que el área de un triángulo es $1/2$ del producto de la base (en nuestro caso el módulo del vector \mathbf{AB}) por la altura.

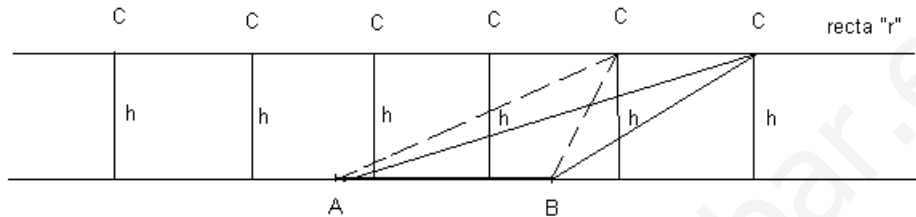
Resulta que la recta r que me han dado $x/(-1) = (y-1)/1 = z/1$ es paralela al segmento AB , puesto que el vector director de la recta es $\mathbf{u} = (-1, 1, 1)$ y el vector $\mathbf{AB} = (-3, 3, 3)$, que como observamos son proporcionales.

Evidentemente el segmento AB no está contenido en la recta porque en dicho caso no se podría formar triángulo y nos resultaría el área 0.

Al ser la recta " r " paralela al segmento AB , la altura de cualquier punto C de la recta trazada sobre la recta que

contiene al segmento AB siempre es la misma, por tanto el área del triángulo siempre es $\frac{3}{2}\sqrt{2} u^2$,

independientemente del punto de la recta que tomemos.



Área = $(1/2)(\text{base})(\text{altura}) = (1/2)\|\mathbf{AB}\| \cdot h$, y " h " no varía sea cual sea el punto C de la recta " r ".

Otra forma de hacerlo (Javier Costillo)

Consideramos un punto C genérico de la recta $-x = y - 1 = z = a$ con " a " número real.

$$C(x, y, z) = C(-a, 1+a, a)$$

Si en el cálculo del área del triángulo vemos que no depende del parámetro " a ", entonces el área será la misma independientemente del punto C de la recta que tomemos

$$A(1, 0, -2) \text{ y } B(-2, 3, 1)$$

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$$

$$\mathbf{AB} = (-3, 3, 3)$$

$$\mathbf{AC} = (-a - 1, 1 + a, a + 2)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -a-1 & 1+a & a+2 \end{vmatrix} = \bar{i}(3a+6-3-3a) - \bar{j}(-3a-6+3a+3) + \bar{k}(-3-3a+3a+3) = (3, 3, 0)$$

Área triángulo = $(1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} u^2$, que no depende del parámetro " a ", y por tanto tampoco del punto C tomado.