

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 3)e^x$.

- (a) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 (b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Solución

(a)

Recuerdo que:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo

$$f(x) = (x - 3)e^x.$$

$$f'(x) = e^x + (x - 3)e^x = (1 + x - 3)e^x = (x - 2)e^x.$$

De $f'(x) = 0$, tenemos $(x - 2) = 0$ de donde $x = 2$ (la exponencial $e^x > 0$ siempre), que será el posible extremo relativo

$$f''(x) = e^x + (x - 2)e^x = (1 + x - 2)e^x = (x - 1)e^x.$$

Como $f''(2) = (2 - 1)e^2 = e^2 > 0$, $x = 2$ es un mínimo relativo que vale $f(2) = f(x) = (2 - 3)e^2 = -e^2$.

(b)

Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$

$$f''(x) = (x - 1)e^x.$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $x - 1 = 0$, de donde $x = 1$ (la exponencial $e^x > 0$ siempre), que es el punto donde piden la recta tangente.

Recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$f(x) = (x - 3)e^x, \text{ luego } f(1) = (1 - 3)e^1 = -2e.$$

$$f'(x) = (x - 2)e^x, \text{ luego } f'(1) = (1 - 2)e^1 = -e.$$

La recta tangente pedida es $y - (-2e) = -e(x - 1)$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- (a) [1 punto] Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.
 (b) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f .
 (c) [1 punto] Calcula $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$.

Solución

(a)

Como es derivable también es continua, en particular en $x = 0$. En este caso la continuidad no nos ayuda mucho por tanto vamos directamente a la derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como es derivable en $x = 0$, tenemos que $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x}) = -e^0 = -1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha) = \alpha$$

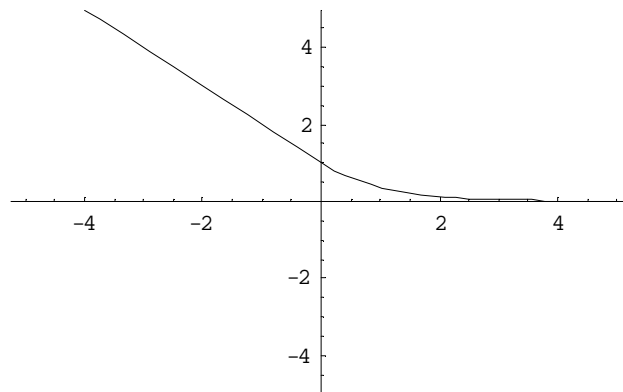
Igualando $f'(0^+) = f'(0^-) = 1$, tenemos $\alpha = -1$, y la función es $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(b)

Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que $1 - x$ es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto $(0^-, 1)$ y $(-1, -2)$

La gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de la exponencial e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.

Un esbozo sería:



(c)

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^0 (1-x)dx + \int_0^{+1} e^{-x} dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + [-e^{-x}]_0^1 =$$

$$= (0) - (-1 - 1/2) + (-e^{-1} - (-e^0)) = 1 + 1/2 - 1/e + 1 = 5/2 - 1/e$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.(a) [1'5 puntos] Calcula el valor de m para el que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ ydetermina A^{-1} para dicho valor de m.(b) [1 punto] Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.**Solución**

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+m & m^2 \end{pmatrix};$$

$$2A^2 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+m & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2+2m & 2m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m+1 & 2m^2-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De $2m + 1 = 0$, tenemos $m = -1/2$ De $2m^2 - m = 1$, resolviendo la ecuación $2m^2 - m - 1 = 0$, tenemos $m = -1/2$ y $m = 1$, por tanto la única solución común es $m = -1/2$.Para $m = -1/2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$; $\det(A) = |A| = -1/2$, luego existe A^{-1} .Recordamos que $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/(-1/2)) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(b)

Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, para obtener M^{-1} tenemos que tener en cuenta que. Si M es cuadrada y $M \cdot B = I$, entonces por definición B es la matriz inversa de M.De $2M^2 - M = I$, sacando factor común la matriz M por la izquierda tenemos $M(2M - I) = I$. Por tanto por definición la matriz inversa es $M^{-1} = 2M - I$, siendo I la matriz unidad del mismo orden que M.**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2007.**(a) [1'5 puntos] Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de ecuación $x + y + z = 3\sqrt{3}$ y π_2 de ecuación $-x + y + z = 2$.(b) [1 punto] Halla la distancia de la recta r al plano π_1 .**Solución**

(a)

Origen de coordenadas $O(0,0,0)$ Plano π_1 de ecuación $x + y + z = 3\sqrt{3}$. Su vector normal es $\mathbf{n} = (1,1,1)$

Plano π_2 de ecuación $-x + y + z = 2$. Su vector normal es $\mathbf{n}' = (-1, 1, 1)$

Como la recta "r" pedida es paralela a ambos planos su vector director \mathbf{u} es el producto vectorial de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{n}' .

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (0, -2, 2)$$

La recta "r" pedida en paramétricas es (pasa por el origen de coordenadas)

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2m \\ z &= 2m, \end{aligned}$$

con $m \in \mathfrak{R}$

(b)

El vector director de la recta "r" es $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$, que por su construcción es perpendicular al vector normal \mathbf{n} del plano π_1 , por tanto la recta y el plano son paralelos con lo cual la distancia de la recta "r" al plano " π_1 " es la distancia de cualquier punto de la recta (el origen) al plano, es decir

$$d(r, \pi_1) = d(O, \pi_1) = \frac{|0 + 0 + 0 + 3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3u.l.$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = (x^2 + 3)/(x^2 - 4)$.

(a) [1 punto] Determina las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

(a)

$$f(x) = (x^2 + 3)/(x^2 - 4)$$

Las asíntotas verticales suelen ser los números que anulan el denominador (tendremos que calcular el límite). En nuestro caso $x = 2$ y $x = -2$.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^+} = +\infty, \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical de } f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^+} = +\infty, \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical de } f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

Como tenemos un cociente de polinomios de igual grado en el numerador y en el denominador tenemos una asíntota horizontal $y = b$ (A.H.), y será la misma en $\pm \infty$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1) = 1, \quad \text{la recta } y = 1 \text{ es una A.H. de } f(x)$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} - 1 \right) = 0^+, \quad f(x) \text{ está por encima de la A.H. en } \pm \infty$$

(b)

La monotonía sale del estudio de $f'(x)$

$$f(x) = (x^2 + 3)/(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

De $f'(x) = 0$, tenemos $-14x = 0$, de donde $x = 0$ que será el posible extremo relativo

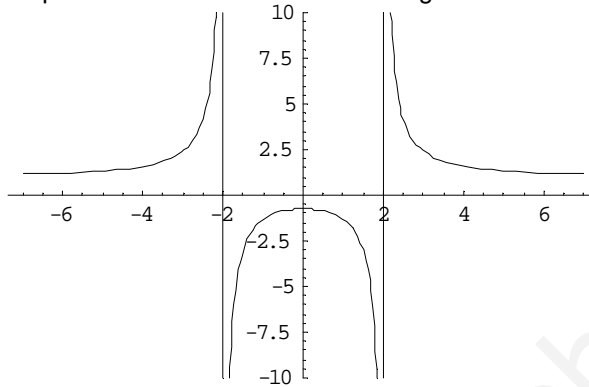
Como $f'(-1) = 14/(+) > 0$, tenemos $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. No olvidemos que la función no existe en $x = -2$, por tanto $f(x)$ crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

Como $f'(1) = -14/(+) < 0$, tenemos $f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. No olvidemos que la función no existe en $x = 2$, por tanto $f(x)$ decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Por definición $x = 0$ es un máximo relativo que vale $f(0) = -3/4$

(c)

Con las asíntotas y la monotonía podemos hacer un esbozo de la gráfica.



Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

Calcula

(a) [1 punto] $\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx$.

(b) [1'5 puntos] $\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x) dx$

Solución

(a)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+1} dx = (3/2) \ln(x^2+1) + 4 \arctan(x) + K$$

(b)

$$\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x) dx$$

Calculamos primero la integral $\int x \cdot \cos(2x) dx$ que es un integral por partes

$I = \int x \cdot \cos(2x) dx$ es una integral por partes. Aplicaremos $\int u dv = uv - \int v du$, siendo u y v funciones con derivada continua.

$u = x$, de donde $du = dx$

$dv = \cos(2x) dx$, de donde $v = \int \cos(2x) dx = (1/2) \sin(2x)$

$$I = \int x \cdot \cos(2x) dx = (x) \cdot ((1/2) \sin(2x)) - \int (1/2) \cdot \sin(2x) dx = (1/2) \cdot x \cdot \sin(2x) + (1/4) \cos(2x)$$

Por tanto $\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2} x \cdot \sin(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) \right]_0^{\pi/4} =$

$$= ((1/2) \cdot (\pi/4) \cdot \sin(\pi/2) + (1/4) \cdot \cos(\pi/2)) - (0 + (1/4) \cdot \cos(0)) = \pi/8 - 1/4$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\begin{aligned} x + my &= m \\ mx + y &= m \\ mx + my &= 1 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} x + my &= m \\ mx + y &= m \\ mx + my &= 1 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ m & m \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Como el sistema es compatible tiene tres ecuaciones con dos incógnitas el determinante de la matriz ampliada $\det(A^*) = |A^*|$ tiene que ser cero. Para los valores que nos salgan de "m". estudiaremos el sistema.

$$\det(A^*) = |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - m^2) - m(m - m^2) + m(m^2 - m) = 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$$

Para resolver $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0$, aplicamos primero Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Cociente $2m^2 - m - 1 = 0$, que es una ecuación de 2º grado y sus soluciones son $m = 1$ y $m = -1/2$. Nos han salido como soluciones de m el 1 (doble) y el -1/2.

Si $m = 1$ tengo tres ecuaciones iguales, por tanto elijo solo una

$x + y = 1$. Tomo $y = \lambda$ con lo cual $x = 1 - \lambda$.

Solución $(x,y) = (1 - \lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathfrak{R}$

Si $m = -1/2$ tomo sólo dos ecuaciones, la 2ª y la 3ª.

$(-1/2)x + y = -1/2$.

$(-1/2)x + (-1/2)y = 1$. Resolviendo esta sistema sale $x = -1$ e $y = -1$

Solución $(x,y) = (-1, -1)$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2007.

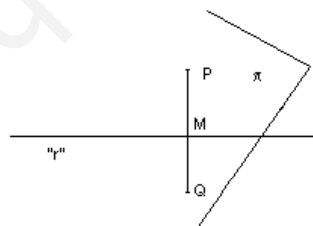
Considera el punto $P(1,0, -2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.

(b) [1 punto] Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Solución

(a)



Punto $P(1,0, -2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

Para calcular la "s" perpendicular a la recta "r" por el punto P, calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta "r" que será el punto M. La recta pedida es la recta que pasa por los puntos P y M.

Calculo el plano π perpendicular a la recta "r" que pasa por P. Su vector normal \mathbf{n} es el vector director de la recta "r" el \mathbf{u} que lo calcularemos como un producto vectorial.

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4) - \mathbf{j}(-8) + \mathbf{k}(2 + 2) = (4, 8, 4)$$

El plano pedido es $4x + 8y + 4z + K = 0$ y le imponemos la condición de que pase por el punto $P(1,0, -2)$

$4(1) + 8(0) + 4(-2) + K = 0$, de donde $K = 4$, luego el plano π es $4x + 8y + 4z + K = 0$ y simplificándolo un poco nos queda $x + 2y + z + 1 = 0$.

Calculamos ya M que es la intersección de "r" con "π", para lo cual ponemos la recta "r" 1º en paramétricas.

$$2x - y = 5$$

$$2x + y - 4z = 7. \text{ Tomo } x = \lambda \text{ con lo cual } y = 2\lambda - 5 \text{ y } z = \lambda - 3$$

$$x = \lambda$$

$$y = -5 + 2\lambda$$

$$z = -3 + \lambda$$

$$(\lambda) + 2(-5 + 2\lambda) + (-3 + \lambda) + 1 = 0, \text{ de donde } \lambda = 2$$

El punto M es $M(2, -5 + 2(2), -3 + (2)) = M(2, -1, -1)$

La recta "s" pedida es la que pasa por $P(1, 0, -2)$ y $M(2, -1, -1)$. Tomo como punto el $P(1, 0, -2)$ y como vector director el $\mathbf{PM} = (2 - 1, -1 - 0, -1 - (-2)) = (1, -1, 1)$

La recta "s" pedida en continua es $(x - 1)/1 = (y - 0)/(-1) = (z + 2)/1$

(b)

Según la construcción que hemos hecho en el apartado (a) resulta que el punto M (proyección ortogonal del punto P sobre la recta "r") es el punto medio del punto P y de su simétrico Q, por tanto:

$$d(P, Q) = 2 \cdot d(P, M) = 2 \cdot \|\mathbf{PM}\| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ u.l.}$$