

## Opción A

## Ejercicio n.º 1 de la opción A de septiembre, modelo 1 de 2007

Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ .

- (a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de  $f$  (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).  
 (b) [1 punto] Calcula el punto de inflexión de la gráfica de  $f$ .

## Solución

Dada  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ , observamos que su dominio son los números  $x > 0$ , puesto que el dominio de  $\sqrt{x}$  es  $x \geq 0$ , y al estar en el denominador tenemos que quitar el 0.

(a)

Para estudiar el crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos estudiamos la primera derivada  $f'(x)$

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}; \quad f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - (3x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Si  $x < 1/3$ ,  $f'(0.2) = -0.4/(+) < 0$ ,  $f'(x) < 0$  por tanto  $f(x)$  decrece en  $x < 1/3$

Si  $x > 1/3$ ,  $f'(1) = 2/(+) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  por tanto  $f(x)$  crece en  $x > 1/3$

Por definición  $x = 1/3$  es un mínimo relativo que vale  $f(1/3) = 2\sqrt{3}$

(b)

Para ver los posibles puntos de inflexión estudiamos la segunda derivada  $f''(x)$

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}; \quad f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{3(2x\sqrt{x}) - (3x-1)(2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}})}{(2x\sqrt{x})^2} = \frac{-3x^2 + 3x}{4x^3\sqrt{x}}$$

De  $f''(x) = 0$ , tenemos  $-3x^2 + 3x = 0$  y las soluciones son  $x = 0$  y  $x = 1$

$x = 0$  no vale porque no está en el dominio. Veamos  $x = 1$

Si  $x < 1$ ,  $f''(0.5) = > 0$ ,  $f''(x) > 0$  por tanto  $f(x)$  es convexa ( $\cup$ ) en  $x < 1$

Si  $x > 1$ ,  $f''(2) = < 0$ ,  $f''(x) < 0$  por tanto  $f(x)$  es cóncava ( $\cap$ ) en  $x > 1$

Por definición  $x = 1$  es un punto de inflexión que vale  $f(1) = 4$

## Ejercicio n.º 2 de la opción A de septiembre, modelo 1 de 2007

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x|x-2|$ .

(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de  $f$  en  $x = 2$ .

(b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de  $f$ .

(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y el eje de abscisas.

## Solución

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}; \quad f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(a)

$x^2 - 2x$  es una función continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x > 2$

$-x^2 + 2x$  es una función continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x < 2$

Veamos la continuidad de  $f(x)$  en  $x = 2$ , es decir si verifica

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x) = 0$$

Como  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ , la función  $f(x)$  es continua en  $x = 2$ , y por tanto en todo  $\mathbb{R}$ .

Estudiamos ya la derivabilidad de  $f(x)$ , en particular en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x > 2 \\ -2x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en  $x = 2$ , es decir si  $f'(2^+) = f'(2^-)$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 2) = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 2) = -2$$

Como  $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ ,  $f(x)$  no es derivable en  $x = 2$ , por lo cual es derivable en  $\mathbb{R} - \{2\}$

(b)

Si  $x > 2$ ,  $f(x) = x^2 - 2x$  es una parábola con las ramas hacia arriba y con la abscisa del vértice en la solución de  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x - 2, f'(x) = 0 \text{ nos dá } x = 1$$

Un cuadro de valores sería

x	f(x) = x <sup>2</sup> - 2x
1	-1 (fuera de su dominio)
2	0
3	3

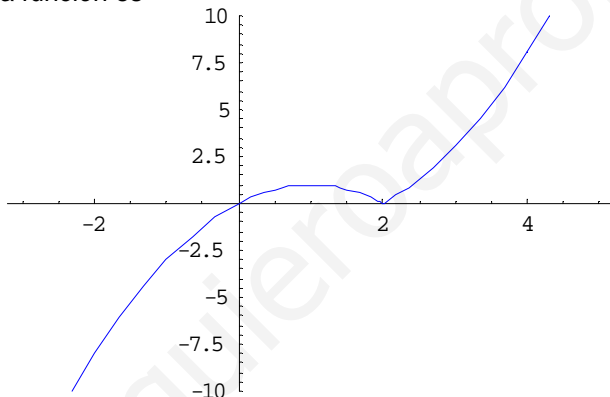
Si  $x < 2$ ,  $f(x) = -x^2 + 2x$  es una parábola con las ramas hacia abajo, y con la abscisa del vértice en la solución de  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -2x + 2, f'(x) = 0 \text{ nos dá } x = 1$$

Un cuadro de valores sería

x	f(x) = x <sup>2</sup> - 2x
1	1
2 <sup>-</sup>	0
0	0
-1	-3

Un esbozo de la gráfica de la función es



(c)

El área que nos piden es  $A = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[ \frac{-x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{-8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$

**Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre, modelo 1 de 2007**

Sea I la matriz identidad de orden 2 y  $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que  $(A - I)^2 = O$ , donde O es la matriz nula de orden 2

(b) [1'25 puntos] Para  $m = 2$ , halla la matriz X tal que  $AX - 2A^T = O$ , donde  $A^T$  denota la matriz traspuesta de A.

**Solución**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a)

$$(A - I)^2 = O; \quad A^2 - AI - IA + I^2 = O; \quad A^2 - 2A + I = O$$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+m & 2m \\ 2 & m+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que  $m = 0$

(b)

Si  $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX - 2A^T = O; AX = O + 2A^T = 2A^T$$

Como  $|A| = 1 - 2 = -1 \neq 0$ , la matriz A tiene inversa  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$  y podemos multiplicar la expresión  $AX = 2A^T$ , por la izquierda por  $A^{-1}$  quedándonos

$$A^{-1}AX = A^{-1}2A^T$$

$$IX = 2 A^{-1}A^T$$

$$X = 2 A^{-1}A^T$$

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 A^{-1}A^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

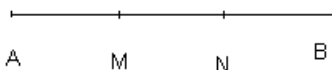
**Ejercicio nº 4 de la opción A de septiembre, modelo 1 de 2007**

(a) [1'25 puntos] Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos A(1,2,1) y B(-1,0,3) en tres partes iguales.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

**Solución**

(a)



A(1,2,1) y B(-1,0,3)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB = 3AM**

$$\mathbf{AB} = (-2, -2, 2)$$

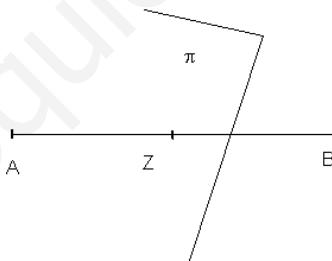
$$\mathbf{AM} = (x-1, y-2, z-1)$$

De **AB = 3AM** obtenemos  $(-2, -2, 2) = (3x - 3, 3y - 6, 3z - 3)$ , e igualando miembro a miembro se tiene  $x = 1/3$ ,  $y = 4/3$  y  $z = 5/3$ , es decir el punto M es  $M(x,y,z) = M(1/3, 4/3, 5/3)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir

$$N(x,y,z) = N\left(\frac{1/3 + (-1)}{2}, \frac{4/3 + 0}{2}, \frac{5/3 + 3}{2}\right) = N(-1/3, 2/3, 7/3)$$

(b)



A(1,2,1), B(-1,0,3) y Z como es el punto medio, es Z(0,1,2)

El plano pedido pasa por el punto Z(0,1,2) y tiene como vector normal el **AB = (-2,-2,2)**

La determinación normal del plano es **AB • (x - z) = 0**, siendo • el producto escalar, es decir

$$(-2, -2, 2) \bullet (x - 0, y - 1, z - 2) = -2x - 2y + 2 + 2z - 4 = -2x - 2y + 2z - 2 = 0. \text{ Simplificando el plano pedido es } \pi \equiv x + y - z + 1 = 0$$

**Opción B**

**Ejercicio nº 1 de la opción B de septiembre, modelo 1 de 2007**

[2'5 puntos] Determina una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que su derivada viene dada por  $f'(x) = x^2 + x - 6$  y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

**Solución**

El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $[a,b]$ , entonces la función  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , con  $x \in [a,b]$  es derivable, y su derivada es  $F'(x) = f(x)$ .

$$\text{En nuestro caso } f(x) = \int f'(x) dx .$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 + x - 6) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + K$$

Vamos a determinar K

Sea "a" el punto donde alcanza el máximo relativo

Sea "b" el punto donde alcanza el mínimo relativo

Leyendo el problema se nos dice que  $f(a) = 3f(b)$ . [el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo)].

Los extremos relativos están entre las soluciones de  $f'(x) = 0$

Si  $f'(m) = 0$  y  $f''(m) < 0$ ,  $x = m$  es el máximo relativo

Si  $f'(m) = 0$  y  $f''(m) > 0$ ,  $x = m$  es el mínimo relativo

$f'(x) = x^2 + x - 6$ ;  $f'(x) = 0$  nos da  $x^2 + x - 6 = 0$ . Resolviendo esta ecuación de 2º grado obtenemos como soluciones 2 y -3

Como  $f''(2) = 0$  y  $f''(2) = 5 > 0$ ,  $x = 2$  es el mínimo relativo

Como  $f''(-3) = 0$  y  $f''(-3) = -5 < 0$ ,  $x = -3$  es el máximo relativo

En nuestro caso  $f(a) = 3f(b)$  es  $f(-3) = 3.f(2)$

$$f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 6x + K$$

$$f(2) = (2)^3/3 + (2)^2/2 - 6(2) + K = 8/3 - 10 + K$$

$$f(-3) = (-3)^3/3 + (-3)^2/2 - 6(-3) + K = 9 + 9/2 + K$$

La expresión  $f(-3) = 3.f(2)$ , se nos convierte en  $(9 + 9/2 + K) = 3.(8/3 - 10 + K)$ . Operando y despejando nos resulta  $K = 71/4$ , luego la función pedida es  $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 6x + 71/4$

### Ejercicio nº 2 de la opción B de septiembre, modelo 1 de 2007

Sea  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \ln(x+1)$ . ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

(a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa  $x = 0$ .

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta  $x = 1$ .

### Solución

(a)

La recta tangente en  $x = 0$  es  $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$f(x) = \ln(x+1); f(0) = \ln(1) = 0$$

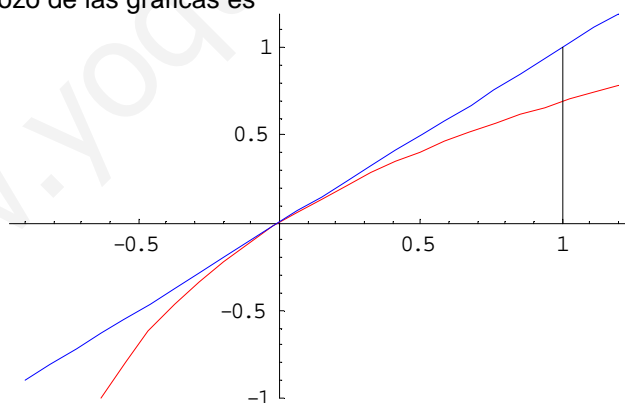
$$f'(x) = 1/(x+1); f'(0) = 1/1 = 1$$

Sustituyendo resulta que la recta tangente en  $x = 0$  es  $y = x$ , que es la bisectriz del I y III cuadrante.

(b)

La gráfica de  $\ln(x + 1)$  es exactamente igual que la de  $\ln(x)$  pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje de abscisas OX.

Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



No hacía falta hacer la gráfica pues conociendo la gráfica de  $\ln(x)$  se sabe que la recta tangente está por encima.

Vamos ya a calcular el área que nos piden

$$A = \int_0^1 (\text{tangente} - \text{grafica}) dx = \int_0^1 (x - \ln(x+1)) dx$$

Calculamos 1º la integral del neperiano, que es por partes.  $(\int u dv = uv - \int v du)$

$$I = \int \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x dx}{x+1} = x \ln(x+1) - I_1$$

$$u = \ln(x+1) \text{ de donde } du = dx/(x+1)$$

$$dv = dx, \text{ de donde } v = x$$

$$I_1 = \int \frac{x dx}{x+1} = \int \frac{(x+1-1) dx}{x+1} = \int (1 - \frac{1}{x+1}) dx = x - \ln(x+1) . \text{ Por tanto}$$

$$I = x \ln(x+1) - I_1 = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)$$

Calculamos ya el área

$$A = \int_0^1 (x - \ln(x+1)) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - (x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)) \right]_0^1 = (1/2 - (\ln(2) - 1 + \ln(2))) - (0 - (0 - 0 + \ln(1))) = 3/2 - 2\ln(2) \text{ u.a.}$$

**Ejercicio nº 3 de la opción B de septiembre, modelo 1 de 2007**

. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para a = -2.

**Solución**

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} .$$

Calculamos el  $\det(A) = |A|$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^a F - 3^a F \\ 2^a F - 3^a F \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(-a-1)$$

Resolvemos  $|A| = 0$ , es decir  $(a - 1)(-a - 1) = 0$ , de donde  $a = 1$  y  $a = -1$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$ , tenemos  $|A| \neq 0$  con lo cual  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ , y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si  $a = 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a F - 1^a F \\ 3^a F - 1^a F \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A^*) = 3$

Como  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si  $a = -1$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$

En  $A^*$  como tenemos dos filas iguales, tenemos  $\text{rango}(A^*) = 2$

Como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ , por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

Lo resolvemos para  $a = -1$

$$-x + y + z = 4$$

$x + y + z = 1$ . Tomamos  $z = \lambda$   
 Restamos ambas ecuaciones y tenemos  
 $2x = -3$ , de donde  $x = -3/2$   
 $y = 1 - x - z = 1 + 3/2 - \lambda = 5/2 - \lambda$   
 La solución del sistema es  $(x, y, z) = (-3/2, 5/2 - \lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathfrak{R}$   
 (b)  
 Resolvemos el sistema para  $a = -2$ .

Nuestro sistema es  
 $-2x + y + z = 4$   
 $x + 2y + z = 1$   
 $x + y + z = 0$   
 A la 2ª le resto la 3ª, y a la 1ª le sumo la 3ª multiplicada por 2, con lo cual nos queda  
 $3y + 3z = 4$   
 $y = 1$   
 $x + y + z = 0$   
 Con  $y = 1$  entrando en la 1ª tenemos  $z = 1/3$ .  
 Con  $y = 1$  y  $z = 1/3$ , entrando en la 3ª tenemos  $x = -4/3$   
 La solución del sistema es  $(x, y, z) = (-4/3, 1, 1/3)$

**También se puede hacer por Cramer**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3}; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1; z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3}$$

Y como vemos se obtiene la misma solución  $(x,y,z) = (-4/3, 1, 1/3)$  cuando  $a = -2$ .

**Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre, modelo 1 de 2007**

Considera los vectores  $\mathbf{u} = (1,1,m)$ ,  $\mathbf{v} = (0,m,-1)$  y  $\mathbf{w} = (1,2m,0)$ .

- (a) [1'25 puntos] Determina el valor de  $m$  para que los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  sean linealmente dependientes.
- (b) [1'25 puntos] Para el valor de  $m$  obtenido en el apartado anterior, expresa el vector  $\mathbf{w}$  como combinación lineal de los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

**Solución**

(a)  
 $\mathbf{u} = (1,1,m)$ ,  $\mathbf{v} = (0,m,-1)$  y  $\mathbf{w} = (1,2m,0)$ .

Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 = 0$$

Resolviendo  $-m^2 + 2m - 1 = 0$ , obtenemos  $m = 1$  (doble), con lo cual para que sean linealmente dependientes los vectores son  $\mathbf{u} = (1,1,1)$ ,  $\mathbf{v} = (0,1,-1)$  y  $\mathbf{w} = (1,2,0)$ .

(b)  
 Para expresar  $\mathbf{w}$  como combinación lineal de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  tenemos que calcular  $a$  y  $b$  de la expresión  $\mathbf{w} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}$ , resolviendo el sistema que nos sale.

$(1,2,0) = a(1,1,1) + b(0,1,-1) = (a, a + b, a - b)$ . Igualando obtenemos  $a = 1$  y  $b = 1$ , por tanto la relación de dependencia es  $\mathbf{w} = 1 \cdot \mathbf{u} + 1 \cdot \mathbf{v}$ .

Esto es la forma normal de hacerlo, pero nos podríamos haber dado cuenta de que sumando el vector  $\mathbf{u}$  con el vector  $\mathbf{v}$  nos daba el vector  $\mathbf{w}$  y habríamos terminado.