

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

Los apartados (a) y (b) se pueden hacer juntos pues lo único que hay que estudiar es la primera derivada $f'(x)$, de la cual saldrá el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos

$$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$$

$$f'(x) = (x - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = e^x(-2x^2 - x + 3)$$

De $f'(x) = 0$, $(-2x^2 - x + 3) = 0$, puesto que la exponencial e^x nunca se anula.

Las soluciones de $-2x^2 - x + 3 = 0$, son $x = 1$ y $x = -1'5$, que serán los posibles máximos y mínimos relativos.

Como $f'(-2) = e^{-2}(-2(-2)^2 - (-2) + 3) = e^{-2}(-3) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1'5)$

Como $f'(0) = e^0(3) = 1(3) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-1'5, 1)$

Como $f'(2) = e^2(-2(2)^2 - (2) + 3) = e^2(-7) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$

Por definición $x = -1'5$ es un mínimo relativo que vale $f(-1'5) = (3(-1'5) - 2(-1'5)^2)e^{-1'5} = -9e^{-1'5}$

Por definición $x = 1$ es un máximo relativo que vale $f(1) = (3(1) - 2(1)^2)e^1 = e$

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Considera las funciones $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)} \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 \ln(x). \quad [\ln \text{ denota la función logaritmo neperiano].$$

(a) [1'25 puntos] Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x = \pi/3$

(se puede hacer el cambio de variable $t = \cos x$).

(b) [1'25 puntos] Calcula $\int g(x) dx$.

Solución

(a)

Una primitiva de $f(x)$ es

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio} \\ t = \cos(x) \\ dt = -\operatorname{sen}(x) dx \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + K =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{array} \right\} = \frac{1}{2 \cos^2(x)} + K$$

Como me dicen que $F(\pi/3) = 1$, tenemos $1 = 1/[2 \cos^2(\pi/3)] + K$, de donde $K = -1$ y la primitiva pedida es

$$F(x) = 1/[2 \cos^2(x)] - 1$$

(b)

Es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$$\int x^3 \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx \rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{x^4}{16} + K$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

(a) [1 punto] Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$2x + y + z = mx$$

$$x + 2y + z = my$$

$$x + 2y + 4z = mz$$

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema anterior para el caso $m = 0$ y para el caso $m = 1$.

Solución

(a)

$$\begin{cases} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-m)x + y + z = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + 2y + (4-m)z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Matriz de los coeficientes } A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$$

Como es un sistema homogéneo, el sistema tiene más de una solución cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 0 & m & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)[(2-m)(3-m) - m] - 1(3-m-m) =$$

$$= -m^3 + 8m^2 - 16m + 9$$

Para resolver $m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$, aplicamos Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & 8 & -16 & 9 \\ & & -1 & 7 & -9 \\ \hline & -1 & 7 & -9 & 0 \end{array}$$

Una solución es $m = 1$, y las otras salen de resolver la ecuación $-m^2 + 7m - 9 = 0$, obteniéndose

$$m = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{y} \quad m = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

Por tanto para $m = 1$, $m = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ y $m = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$ el sistema tiene más de una solución

(b)

En el caso de $m = 0$, solo tiene la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

En el caso de $m = 1$, tiene infinitas soluciones. Tomo las ecuaciones 2^a y 3^a (con ellas el rango de A es 2)

$$x + y + z = 0$$

$$x + 2y + 3z = 0. \text{ Hacemos } z = \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$x + y = -\lambda$$

$$x + 2y = -\lambda. \quad 2^a + 1^a(-1), \text{ y nos resulta } y = -2\lambda \text{ y } x = \lambda, \text{ por tanto la solución del sistema para } m = 1 \text{ es}$$

$$(x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathfrak{R}$$

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Se considera la recta r definida por $mx = y = z + 2$, ($m \neq 0$),

y la recta s definida por $(x - 4)/4 = y - 1 = z/2$

(a) [1'5 puntos] Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

(b) [1 punto] Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Solución

(a)

Ponemos la recta $r \equiv mx = y = z + 2$, en forma continua $x/(1/m) = y/1 = (z + 2)/1$. Un vector director suyo es

$$(1/m, 1, 1) \text{ y otro paralelo es } \mathbf{u} = (1, m, m)$$

La recta s ya me la han dado en forma continua $(x - 4)/4 = (y - 1)/1 = z/2$. Un vector director suyo es

$$\mathbf{v} = (4, 1, 2)$$

Las rectas "r" y "s" son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, es decir su producto escalar es cero

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, m, m) \cdot (4, 1, 2) = 4 + m + 2m, \text{ por tanto } 3m = -4, \text{ de donde } m = -4/3$$

(b)

Las rectas "r" y "s" son paralelas si lo son sus vectores directores, es decir sus coordenadas son proporcionales.

En nuestro caso

$1/4 = m/1 = m/2$, lo cual es absurdo pues m no puede ser a la vez $1/4$ y $1/2$, luego no hay ningún valor de "m" para el que las rectas sean paralelas.

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dada la función f definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = (e^x + 1) / (e^x - 1)$ determina las asíntotas de su gráfica.

Solución

La recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de la función f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Suelen ser los valores de "x" que anulan el denominador.

De $e^x - 1 = 0$, tenemos $e^x = 1$, luego $x = 0$

Veamos si $x = 0$ es A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty, \text{ la recta } x = 0 \text{ es una A.V. de la función } f.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal (A.H.) de la función f si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$

Lo estudiamos en $+\infty$ y en $-\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ \infty \end{array} \right\}$, Aplicamos L'Hôpital $\left. \begin{array}{l} \infty \\ \infty \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$, la recta $y = 1$ es una A.H. de la

función f en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$, la recta $y = -1$ es una A.H. de la función f en $-\infty$.

Veamos la posición relativa respecto a las A.H.

En $+\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right) = 0^+$, la función está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} + 1 \right) = 0^-$, la función está por debajo de la A.H.

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$, donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Esta función **no tiene A.O.**

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x$.

(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de g .

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 2$.

(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas.

Solución

(a)

$g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x$ es un cúbica. Veamos sus cortes con los ejes y su comportamiento en $\pm\infty$

Corte con ordenadas.

$g(0) = 0$, punto (0,0)

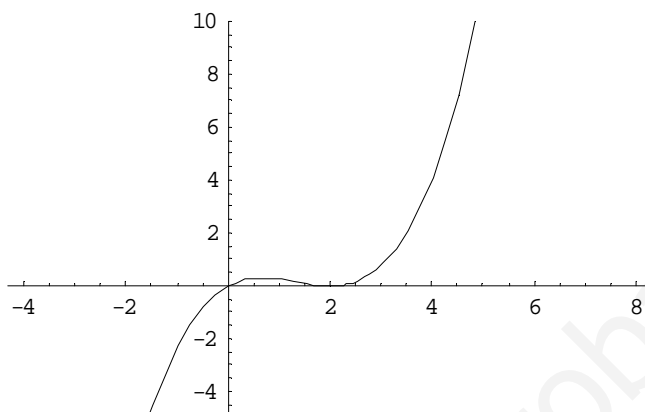
Corte con abscisas.

$g(x) = 0$, $(1/4)x^3 - x^2 + x = 0$, resolviendo la ecuación sale $x = 2$ (doble), punto $(2,0)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}x^3 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^3 \right) = -\infty$$

Un esbozo de la gráfica es



(b)

De la gráfica se observa que la recta tangente en $x = 2$, es una tangente horizontal es decir $y = 0$. Vamos a comprobarlo

La recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es $y - g(2) = g'(2)(x - 2)$.

$$g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x, g(2) = 0.$$

$$g'(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x, g'(2) = 0.$$

Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 0 = 0(x - 2)$, es decir $y = 0$.

(c)

$$\text{El área pedida es } \text{Área} = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[1 - 8/3 + 2 \right] = \left[1/3 \right] u^2$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

$$\text{Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

(a) [1'25 puntos] Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k .

(b) [1'25 puntos] Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A .

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \neq 0$, por lo menos $\text{rango}(A) = 2$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = 3$ y si $|A| = 0$ $\text{rango}(A) = 2$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} 3^a + 1^a(-1) \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4(3 - k^2)$$

Si $|A| = 0$, tenemos $(3 - k^2) = 0$ de donde $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$

Si $k \neq +\sqrt{3}$ y $k \neq -\sqrt{3}$, $\text{rango}(A) = 3$

Si $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$, $\text{rango}(A) = 2$

(b)

Si $k = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 4(3 - 0) = 12 \neq 0$, tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Considera los puntos $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(3, 1, 0)$.

(a) [1 punto] Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

(b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto del plano π .

Solución

$A(2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(3, 1, 0)$.

(a)

Plano π que contiene a los puntos B, C y D

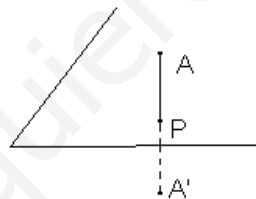
Punto $B(-1, 1, 2)$, vectores paralelos independientes el $\overrightarrow{BC} = (3, 1, -1)$ y el $\overrightarrow{BD} = (4, 0, -2)$

Ecuación continua

$$0 = \det(\overrightarrow{x - \vec{a}}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (x+1)(-2) - (y-1)(-2) + (z-2)(-4) = -2x + 2y - 4z + 4 = 0$$

Simplificando tenemos $-x + y - 2z + 2 = 0$ y un vector normal sería $\mathbf{n} = (-1, 1, -2)$

(b)



Para calcular el simétrico del punto A respecto del plano $\pi \equiv -x + y - 2z + 2 = 0$, lo que hacemos es calcular el simétrico del punto A sobre su proyección ortogonal P sobre el plano.

Una forma de hacerlo es calcular la recta perpendicular al plano que pasa por A. Su punto es $A(2, 0, 1)$ y su vector director el normal del plano, es decir $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (-1, 1, -2)$

$$\text{Ecuaciones paramétricas} \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Calculamos P como intersección de la recta con el plano, sustituyendo la ecuación de la recta en el plano $-(2 - \lambda) + \lambda - 2(1 - 2\lambda) + 2 = 0$. De donde $\lambda = 1/3$, y el punto P es $P(2 - 1/3, 1/3, 1 - 2(1/3)) = P(5/3, 1/3, 1/3)$.

P es el punto medio del segmento AA' , siendo A' el simétrico buscado.

$(5/3, 1/3, 1/3) = ((2 + x)/2, y/2, (z + 1)/2)$ de donde $x = 4/3$, $y = 2/3$ y $z = -1/3$, es decir el punto simétrico buscado es $A'(4/3, 2/3, -1/3)$