

### Opción A

#### Ejercicio 1.-

[2'5 puntos] Se considera la función  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ .  
 Determina la asíntota de la gráfica

#### Solución

Evidentemente, la función no tiene asíntotas verticales, ya que su dominio es  $[1, +\infty)$

Estudiamos la asíntota horizontal hacia la derecha, es decir, para  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x) = +\infty$$

Luego, no hay asíntota horizontal para  $x \rightarrow \infty$

Para  $x \rightarrow -\infty$  la función no está definida, por tanto, no podemos calcular asíntotas hacia la izquierda.

La función puede tener una asíntota oblicua hacia la derecha:

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indet.} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \infty - \infty = \text{Indet.} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Luego la asíntota de la gráfica de la función es una asíntota oblicua hacia la derecha

cuya ecuación es:  $y = 2x - \frac{1}{2}$

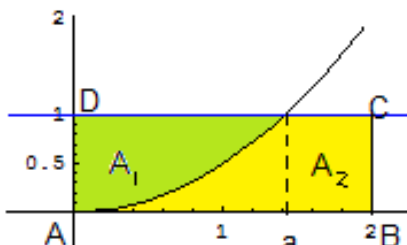
#### Ejercicio 2.

La curva  $y = \frac{1}{2}x^2$  divide el rectángulo de vértices  $A=(0,0)$ ,  $B=(2,0)$ ,  $C=(2,1)$  y  $D=(0,1)$  en dos recintos

- [0'75 puntos] Dibujar dichos recintos
- [1'75 puntos] Hallar el área de cada uno de ellos.

#### Solución

a)



b) El área del rectángulo completo es  $A_T = \text{base} \cdot \text{altura} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ u}^2$   
 El área desde el punto  $A(0,0)$  hasta el punto "a", es el área bajo la recta  $y = 1$ , menos el

área limitada por la parábola y el eje OX será:  $A_1 = a \cdot 1 - \int_0^a \frac{1}{2}x^2 dx$

Para calcular el punto "a", igualamos la ecuación de la recta DC ( $y = 1$ ) a la de la parábola:

$$\frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, \text{ puesto que } a \text{ es positivo. Así:}$$

$$A_1 = (\sqrt{2} \cdot 1) - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} x^2 dx = (\sqrt{2} \cdot 1) - \left[ \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} \cdot 1) - \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= (\sqrt{2} \cdot 1) - \left( \frac{(\sqrt{2})^3}{6} \right) - \left( \frac{(0)^3}{6} \right) = (\sqrt{2} \cdot 1) - \frac{1\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} u^2$$

Como  $A_T = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = A_T - A_1 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} u^2$

Por tanto:  $A_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} u^2$  y  $A_2 = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} u^2$

### Ejercicio 3.

a) [1'75 puntos] Discute según los valores  $\lambda$  el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para  $\lambda = 0$ .

#### Solución

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x + \lambda z = \lambda \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ \lambda & & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6\lambda = 0 \\ \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda = 6 \end{cases}$$

a)

Por tanto:

Si  $\lambda \neq 0$  y  $\lambda \neq 6$ ,  $r(A) = 3 = r(A^*) = n^{\circ}$  de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE DETERMINADO

Si  $\lambda = 0$ ,  $r(A) = 2$ ;  $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $r(A^*) = r \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$r(A) = r(A^*) = 2 < n^{\circ}$  de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE

INDETERMINADO

Si  $\lambda = 6$ ,

$$r(A) = 2; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; r(A^*) = r \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 36 - 6 - 18 = 12 \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 3$$

$r(A) = 2 \neq r(A^*) = 3$ , luego el sistema será INCOMPATIBLE

b)  $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = t \Rightarrow y + 3t = 1 \Rightarrow y = 1 - 3t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

### Ejercicio 4.

Considera el punto  $P(1, 0, 0)$ , la recta  $r$  definida por  $x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{-2}$  y la recta  $s$  definida

por  $(x, y, z) = (1, \lambda, \theta) + 2(0, \quad, \quad)$

a) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$

b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasando por  $P$  es paralelo a  $r$  y  $s$

#### Solución

$$r: x-3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} A(3,0,-1) \\ \vec{d}=(1,2,-2) \end{cases}$$

$$s: (x,y,z) = (1,1,0) + 2(0 \quad \quad \quad) \Rightarrow \begin{cases} B(1,1,0) \\ \vec{d}'=(-1,2,0) \end{cases}$$

Como  $r(\vec{d}, \vec{d}') = 2$ , las rectas se cruzan o se cortarán en un punto.

$$r(\vec{d}, \vec{d}', \overline{AB}) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{Adjun. } 2^a F) = 4 + 2(-3) = -2 \neq 0 \text{ las rectas se}$$

cruzan..

b) Si el plano Pasa por P, su punto base será dicho punto.

Si es paralelo a r y s, los vectores directores de las rectas serán también los del plano:

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{u}=\vec{d}=(1,2,-2) \\ \vec{v}=\vec{d}'=(-1,2,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 2 & 2 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z + 2y + 2z + 4(x-1) = 4x + 2y + 4z - 4 = 0$$

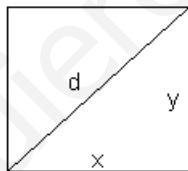
Por tanto:  $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$

### Opción B

#### Ejercicio 1

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos cuya área mide  $16 \text{ cm}^2$ , determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud

#### Solución



El área de este rectángulo es:  $A = x \cdot y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}$

Su diagonal, según el teorema de Pitágoras está dada por la expresión:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 16^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 16^2}}{x}$$

Ya que x es un valor positivo.

Calculamos ahora la primera derivada de la función que hemos obtenido y la igualamos a cero:

$$d'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16^2}} \cdot x - \sqrt{x^4+16^2} \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^4}{\sqrt{x^4+16^2}} - \sqrt{x^4+16^2} = \frac{2x^4 - x^4 - 16^2}{\sqrt{x^4+16^2}} = \frac{x^4 - 16^2}{x^2 \cdot \sqrt{x^4+16^2}} = 0$$

Luego:  $x^4 - 16^2 = 0 \Rightarrow x^4 = 16^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16^2} = \pm 4$ , pero como  $x > 0 \Rightarrow x = +4$

Para determinar si tenemos un valor máximo o mínimo para d, calculamos su derivada segunda:

$$d''(x) = \left( \frac{x^4 - 16^2}{x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2}} \right)' = \frac{4x^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2} - (x^4 - 16^2) \cdot (x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2})'}{(x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2})^2} =$$

$$= \frac{4x^5 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2} - (x^4 - 16^2) \cdot (x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2})'}{(x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 16^2})^2}$$

Como  $d''(4) = \frac{4 \cdot 4^5 \cdot \sqrt{4^4 + 16^2} - 0}{(4^2 \cdot \sqrt{4^4 + 16^2})^2} > 0$ , para  $x=4$ , la diagonal del rectángulo tiene un valor

mínimo. Para este valor de  $x$ ,  $y = \frac{16}{4} = 4$ ; luego el rectángulo de área 16 que tiene una diagonal de menor longitud es un cuadrado de lado 4.

### Ejercicio 2.

[2'5 puntos] Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$ .

Halla la primitiva  $F$  de  $f$  que cumple  $F(0) = 3$ . (Sugerencia: Utiliza el cambio de variable  $t = \frac{3}{2}x^2$ )

### Solución

Calculamos la integral indefinida de la función dada (conjunto de todas sus primitivas), utilizando el cambio de variable propuesto:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow x^4 = \frac{4}{9}t^2 \\ dt = 3x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{\sqrt{4-9 \cdot \frac{4}{9}t^2}} = \int \frac{dt}{3\sqrt{4-4t^2}} = \int \frac{dt}{3\sqrt{4(1-t^2)}} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \arcsen t + k = \frac{1}{6} \arcsen \left( \frac{3}{2}x^2 \right) + k$$

Como:  $F(0) = 3 \Rightarrow F(0) = \frac{1}{6} \arcsen \left( \frac{3}{2} \cdot 0^2 \right) + k = 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

Por tanto:  $F(x) = \frac{1}{6} \arcsen \left( \frac{3}{2}x^2 \right) + 3$

### Ejercicio 3.

[2'5 puntos] Sean las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Determina la matriz  $X$  que verifica  $AX - B^t = 2C$  ( $B^t$  es la matriz traspuesta de  $B$ )

### Solución

$$AX - B^t = 2C \Rightarrow AX = 2C + B^t$$

Si existe  $A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}(2C + B^t)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = 1 - 2 + 1 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11}=+ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{12}=- \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{13}=+ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{21}=- \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 & A_{22}=+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 & A_{23}=- \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{31}=+ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{32}=- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 & A_{33}=+ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A))^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2C+B^t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \left( 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-6-0 & 1+4-7 \\ 1-6-0 & -1+4-21 \\ -1-6-0 & 1+4-35 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -5 & -18 \\ -7 & -30 \end{pmatrix}$$

Luego:  $X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$

#### Ejercicio 4.

Considera la recta r definida por  $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$  y la recta s definida por  $\begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$

- a) [1'5 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s  
 b) [1 punto] ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razona la respuesta..

#### Solución

Calculamos en primer lugar una determinación lineal (vector director y punto por el que pasa) de cada una de las rectas.

$$\text{Recta r: } \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (1, 1, 2); \quad \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow z=2 \Rightarrow A(0, 3, 2)$$

$$\text{Recta s: } \vec{d}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{k} = (-4, 0, -2); \quad \begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases} y=-\frac{1}{2}; z=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow B(-3, -\frac{1}{2}, 0)$$

- a) Si el plano contiene a r, uno de sus vectores directores será  $\vec{d} = (1, 1, 2)$  y su punto base,  $A(0, 3, 2)$ .

Si el plano es paralelo a s, el otro vector director será  $\vec{d}' = (-4, 0, -2)$

Por tanto, la ecuación del plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & 1 & -4 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2x-8(y-3)+4(z-2)+2(y-3) = -2x-6y+4z+10=0$$

$$\pi \equiv x+3y-2z-5=0$$

b) Para que contenga a  $r$ , debe formar parte del haz de planos que contienen a  $r$ :

$$x-y+3+\lambda(x+y-z-1)=0$$

Luego el plano sería de la forma:  $(1+\lambda)x+(-1+\lambda)y-\lambda z+(3-\lambda)=0$

y su vector normal sería:  $\vec{n}=(1+\lambda,-1+\lambda,-\lambda)$

Para que sea perpendicular a  $s$ , el vector normal del plano y el director de la recta, han de ser linealmente dependientes, es decir,

$$\text{rango}(\vec{d}', \vec{n}) = 1 \Rightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 1+\lambda & -1+\lambda & -\lambda \end{pmatrix} = 1$$

Para ello:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1+\lambda & -1+\lambda \end{vmatrix} = 4-4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda + 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Como los valores de  $\lambda$  son distintos, los dos determinantes nunca podrán ser cero simultáneamente, luego el rango no podrá ser 1. Por tanto  $\vec{d}'$  y  $\vec{n}$  son siempre linealmente independientes y no existe ningún plano que contenga a  $r$  y sea perpendicular a  $s$