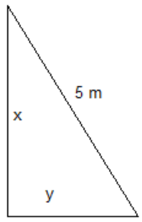
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 1 de año 2010

[2'5 puntos] Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Solución



Función a maximizar $A = (1/2)(x)(y)$

Relación entre las variables $x^2 + y^2 = 5^2$, de donde $y = +\sqrt{(25 - x^2)}$, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.

Función a maximizar $A(x) = (1/2)(x).(\sqrt{(25 - x^2)})$

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $A(x)$

$A'(x) = (1/2)[(\sqrt{(25 - x^2)}) - (x^2) / (\sqrt{(25 - x^2)})]$. De $A'(x) = 0$, tenemos $((\sqrt{(25 - x^2)})^2 = x^2$, es decir $2x^2 = 25$, de donde $x = \pm\sqrt{(25/2)}$, y como "x" es una longitud $x = \sqrt{(25/2)}$ m.

Las medidas de los catetos son $x = \sqrt{(25/2)}$ m. e $y = (\sqrt{(25 - ((\sqrt{(25/2)^2})}) = \sqrt{(25/2)}$ m., es decir es un triángulo isósceles rectángulo.

Veamos que $x = \sqrt{(25/2)}$ es un máximo, viendo que $A''(\sqrt{(25/2)}) < 0$

$A'(x) = (\sqrt{(25 - x^2)}) - (x^2) / (\sqrt{(25 - x^2)})$.

$A''(x) = (-2x) /((\sqrt{(25 - x^2)}) - [(2x. (\sqrt{(25 - x^2)}) + x^3 / (\sqrt{(25 - x^2)})] / (25 - x^2)$

Sustituyendo "$\sqrt{(25/2)}$" por "x" en $A''(x)$ obtenemos $A''(\sqrt{(25/2)}) = 72/(3)^3 = -1 - [25.\sqrt{(25/2)} + 25/2] / (25/2) < 0$, luego es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 de año 2010

[2'5 puntos] Sea $f :(-2, +\infty) \to R$ la función definida por $f(x) = \ln(x + 2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución

Una primitiva F(x) es $F(x) = \int \ln(x + 2).dx$, que es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)

Tomamos $u = \ln(x+2)$ de donde $du = dx/(x+2)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$F(x) = \int \ln(x + 2).dx = x.\ln(x+2) - \int[x/(x+2)]dx = x.\ln(x+2) - \int[(x+2-2)/(x+2)]dx = x.\ln(x+2) - \int[1 - 2/(x+2)]dx =$
$= x.\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| + K$.

Como $F(0) = 0$, tenemos que $0 = 0.\ln(2) - 0 + 2.\ln(2) + K$, de donde $K = -2.\ln(2)$, y la primitiva pedida es:

$F(x) = x.\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| - 2.\ln(2)$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 de año 2010

Considera el sistema

$$3x - 2y + z = 5$$
$$2x - 3y + z = -4$$

(a) [1'5 puntos] Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado.

(b) [1 punto] ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

Solución

(a)

Para que al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$, sea un sistema compatible indeterminado, tenemos que tener rango(A) = rango(A^*) < 3, que es el nº de incógnitas, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes del sistema y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9+4 \neq 0$, el rango de A ya es 2. Para que el rango de A no sea 3 su determinante (|A|) tiene que ser 0.

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= \lambda(-3-2) = -5\lambda = 0$, de donde **$\lambda = 0$**.

Veamos que con $\lambda = 0$ rango(A^*) = 2.

En $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener una fila de ceros, tenemos rango(A^*) = 2.

Si **$\lambda \neq 0$** por el Teorema de Rouche al ser rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si **$\lambda = 0$** por el Teorema de Rouche al ser rango(A) = rango(A^*) 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

En este ejercicio no hay ningún valor de **λ** para el cual el sistema sea incompatible y no tenga solución, pues tendría que darse rango(A) $\neq$ rango(A^*), lo cual no es nuestro caso.

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 de año 2010

Considera los puntos A(1, 0, 2), B(−1, 2, 4) y la recta r definida por

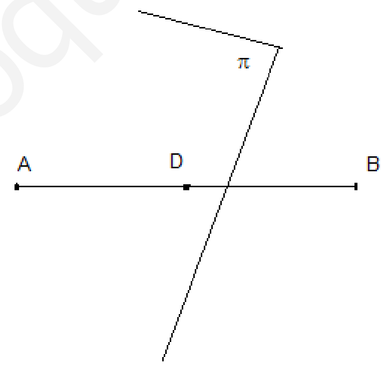
$$(x + 2)/2 = y - 1 = (z - 1)/3$$

(a) [1'5 puntos] Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B.

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene los puntos A y B.

Solución

(a)

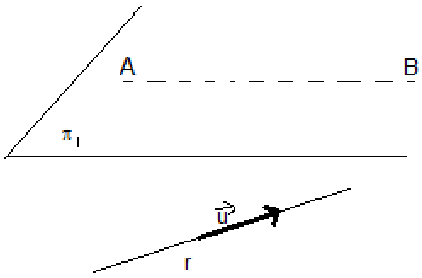


El plano que equidista de los puntos A(1,0,2) y B(-1,2,4) es el perpendicular al segmento AB en su punto medio D=((1-1)/2, (0+2)/2, (2+4)/2) = D(0,1,3)

Como el plano π es perpendicular al segmento un vector normal suyo **n** es el vector **AB** = (-1-1,2-0,4-2)=(-2,2,2)

Un plano paralelo es -2x+2y+2z + K = 0, como pasa por D(0,1,3), tenemos 0 + 2 + 6 + K = 0, de donde K = -8, y el plano pedido es -2x+2y+2z-8 = 0.

(b)



Como me piden un plano π_1 que contenga a los puntos A y B y además sea paralelo a la recta "r", formamos la recta que pasa por los puntos A y B, después con ella construimos el haz de planos que la contienen como generatriz, consideramos el haz de planos como un plano genérico y le imponemos la condición de que sea paralelo a la recta "r".
Recta que pasa por A y B. Punto el A(1.0.2), vector **AB** = (-2,2,2)
Recta en continua: (x-1)/(-2) = y/2 = (z-2)/2. Ponemos ahora la recta en implícita.
Por un lado (x-1)/(-2) = y/2, de donde x+y-1=0
Por otro lado y/2 = (z-2)/2, de donde y – z + 2 = 0.
El haz de plano que genera es (x+y-1) + λ(y – z + 2) = x + y(λ+1) – λz + 2λ – 1 = 0. Un vector genérico suyo sería **n** = (1, λ+1, - λ).
Como el haz tiene que ser paralelo a la recta "r" el vector **n** tiene que ser perpendicular al vector **u** de la recta "r", es decir su producto escalar tiene que ser 0, es decir **n.u** = 0 = 2 + λ+1 +3(-λ) = -2λ + 3 = 0, de donde λ=3/2, y el plano pedido es (x+y-1) + (3/2)(y – z + 2) = 0.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 de año 2010

Sea f : (0, +∞) → R la función definida por f(x) = ln(x^2 +3x), donde ln denota el logaritmo neperiano.
(a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación x − 2y +1 = 0.
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

Solución

(a)
Como me piden los puntos de f(x) donde la recta tangente es paralela a la recta x − 2y +1 = 0,, las pendientes han de ser iguales.
La recta es y = (x+1)/2, y su pendiente es y' = 1/2
La pendiente genérica de f es f'(x) = (2x+3)/(x^2+3x). Igualando pendientes tenemos:
(2x+3)/(x^2+3x) = 1/2, de donde x^2 – x – 6 = 0. Resolviendo la ecuación nos sale x = -2 y x = 3. Como el dominio de la función es (0,+∞) solo nos vale x = 3. El único punto de la recta que cumple la condición pedida es (3, ln(18)).
(b)
f(x) = ln(x^2+ 3x), de donde f(3) = ln(18)
f'(x) = (2x+3)/(x^2+3x), de donde f'(3) = l9/18 = 1/2

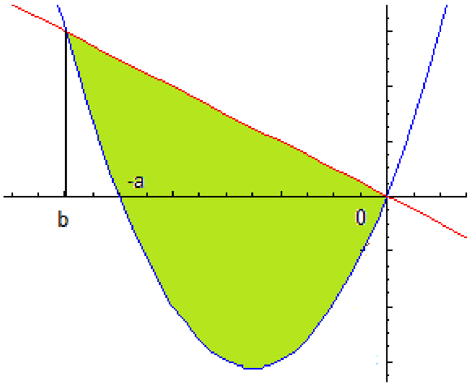
Recta tangente en "3" es y – f(3) = f'(3)(x-3), es decir y – ln(18) = (1/2)(x-3)
Recta normal en "3" es y – f(3) = (-1/f'(3)).(x-3), es decir y – ln(18) = -2.(x-3)

Ejercicio 2 opción B, modelo 1 de año 2010

[2'5 puntos] Calcula el valor de a > 0 sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola y = x^2 + ax y la recta y + x = 0 vale 36 unidades cuadradas.

Solución

Sabemos que la recta y = -x es la bisectriz del II y IV cuadrante.
La parábola y = x^2 + ax tiene las ramas hacia arriba, corta al eje OX en x = 0 y x = -a (soluciones de x^2 +ax = 0).
Un esbozo de la gráfica sería



Área = 36 = $\int_b^0$(recta – parábola)dx
"b" es la solución de recta = parábola, $x^2 + ax = -x$, de donde $x^2 + x(a+1) = x(x + (a+1)) = 0$, de donde las soluciones son x O 0 yy x = -a – 1, es decir

$36 = \int_b^0(\text{recta} - \text{parábola})dx = \int_{-a-1}^{0}(-x - x^2 - ax)dx = [-x^2/2 - x^3/3 - ax^2/2]_{-a-1}^{0} =$
$= (0) - [\, -(-a-1)^2/2 - (-a-1)^3/3 - a(-a-1)^2\,] = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1)/6 = 36$, de donde $a^3 + 3a^2 + 3a - 215 = 0$

Utilizando Ruffini, tenemos (probamos con el 5)

	1	3	3	-215
5		5	40	215
	1	8	43	0

Vemos que la raíz es 5, es decir "**a = 5**". Si intentamos resolver la ecuación $x^2 + 8x + 43 = 0$, vemos que no tiene mas soluciones reales.

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 de año 2010

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Determina los valores de α para los que A tiene inversa.
(b) [1'25 puntos] Calcula la inversa de A para α = 1.
(c) [0'75 puntos] Resuelve, para α = 1, el sistema de ecuaciones AX = B.

Solución

(a)
Para que A tenga inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$, su determinante (|A|) no puede ser cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 - 2(3-3\alpha) + \alpha(1-2\alpha) = -2\alpha^2 + 7\alpha - 6$.

Si |A| = 0, tenemos $+2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$, y salen como soluciones α = 2 y α = 3/2, por tanto **si α ≠ 2 y α ≠ 3/2, existe la matriz inversa de A**

(b)
Inversa de A para α = 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$. Teniendo en cuenta el resultado del apartado (a) tenemos que

$|A| = -2(1)^2 + 7(1) - 6 = -1$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c)

Para α = 1 existe A^{-1} y podemos multiplicar por la izquierda la expresión A.X = B, obteniendo

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$, de donde $I.X = X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 de año 2010

Considera los puntos A(1, 1, 1), B(0, −2, 2), C(−1, 0, 2) y D(2, −1, 2).

(a) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

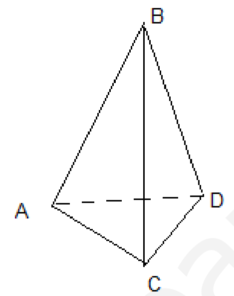
(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

Solución

(a)

A(1, 1, 1), B(0, −2, 2), C(−1, 0, 2) y D(2, −1, 2).

Sabemos que el volumen de un prisma es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan dichos vectores, el cual es el valor absoluto (lo notaremos **| |**) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de tres vectores con un mismo origen, en nuestro caso utilizaremos los vectores **AB**, **AC** y **AD**.



AB = (-1,-3, 1), **AC** = (-2,-1,1) y **AD** = (1,-2,1)

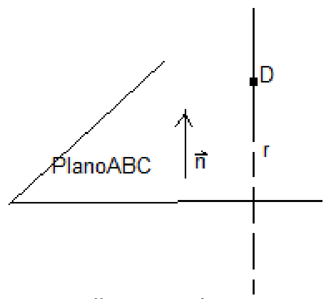
Volumen = (1/6).| [**AB**, **AC, AD**] | = $(1/6).\left| \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} \right| = (1/6).\left| \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| =$

= (1/6).| +(1)(-2-3) | = (1/6).| -5 | = 5/6 u.v.

(b)

Determinamos primero el plano que pasa por los puntos A, B y C. Tomo como punto el A(1,1,1) y como vectores independientes **AB** = (-1,-3,1) y **AC** = (-2,-1,1)

Plano π_{ABC} = det(**AX**,**AB**,**AC**) = $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x-1)(-2) – (y-1)(1) + (z-1)(-5) = -2x-y-5z+8 = 0.



La recta perpendicular al plano tiene como vector director, el vector normal del plano **n** = (-2,-1,5)

La recta pedida es (x-2)/(-2) = (y+1)/(-1) = (z-2)/5