EXAMEN - MATRICES - MATEMÁTICAS II

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Ejercicio nº 3.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1 = (3, -1, 2, 0); \ \vec{u}_2 = (1, 2, -1, 1); \ \vec{u}_3 = (2, 1, 0, -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1, u_2, u_3.

Ejercicio nº 5.-

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**, ¿es posible que el rango de la matriz sea 4 si añadimos una nueva columna?**

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculamos − e igualamos el resultado a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{array}\right\} \quad a(a-2) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 0$, $-2b = 1 \;\to\; b = \dfrac{-1}{2} \;\to\; A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $a = 2$, $2b = 1 \;\to\; b = \dfrac{1}{2} \;\to\; A = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 2.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^5 = A^4 A = IA = A$

b) $A^{25} = A^{4\cdot 6+1} = \left(A^4\right)^6 A = I^6 A = IA = A$

Para hallar $^{-}$, tenemos en cuenta que:

$A^4 = A^3 A = I \quad \rightarrow \quad A^{-1} = A^3$

Utilizando los resultados del apartado a), tenemos que:

$$A^{25}+A^{-1}=A+A^{3}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 9 & 7 & -1\\ 7 & 9 & 1 & -4\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{c}2^{a}\\ 1^{a}\\ 3^{a}\\ 4^{a}\end{array}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ 4 & 9 & 7 & -1\\ 7 & 9 & 1 & -4\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\ 2^{a}+2\cdot 1^{a}\\ 3^{a}+4\cdot 1^{a}\\ 4^{a}+7\cdot 1^{a}\end{array}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & 1\\ 0 & 9 & 15 & 3\\ 0 & 9 & 15 & 3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-3\cdot 2^{a}\\ 4^{a}-3\cdot 2^{a}\end{array}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\ \text{Por tanto, } ran(M)=2.$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1=(3,\ -1,\ 2,\ 0);\ \vec{u}_2=(1,\ 2,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_3=(2,\ 1,\ 0,\ -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son u_1, u_2, u_3.

Solución:

Calculamos el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 7 \cdot 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$ Por tanto, el rango de la matriz es 3.

Esto significa que u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes.

Ejercicio nº 5.-

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿es posible que el rango de la matriz sea 4 si añadimos una nueva columna?

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 4^a - 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene rango 2; por tanto, añadiendo una nueva columna, la matriz resultante como máximo podría tener rango 3, pero nunca 4.