Asignatura: Geometría I
Grado en Matemáticas. Universidad de Granada
Tema 1. Cálculo matricial y ecuaciones lineales

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

7 de febrero de 2013

Índice

1. Introducción

El primer tema de la asignatura Geometría I se refiere a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Para un alumno de primero todos estos conceptos les son familiares ya que fueron explicados (en todo o en parte) en el último curso del bachillerato. En este tema vamos de nuevo a dar las definiciones y los principales resultados y sus demostraciones.

En la antigua Licenciatura de Matemáticas, desde los años 80 hasta el 2010 que empezó el nuevo Grado en Matemáticas en la UGR, este tema pertenececía a esta asignatura, que era anual, pero no era el primer tema. En el antiguo programa se empezaba con espacios vectoriales y a continuación aplicaciones lineales. En éste se decía qué era una matriz, concretamente, a toda aplicación lineal se le asociaba su representación matricial. Entonces todas las operaciones de matrices, es decir, suma de matrices, producto por escalares y producto de matrices tenían un significado *geométrico* en términos de aplicaciones lineales. También se explicaba el teorema de Rouché-Frobenius, cuyo enunciado y demostración tenía todo su sentido justo en este tema. El temario continuaba con espacio dual, diagonalización y aplicaciones multilineales. Y dentro de este tema, una vez sabido la dimensión de los espacios de tensores antisimétricos, aparecía de forma natural el concepto de determinante de un endomorfismo, o lo que era equivalente, de una matriz cuadrada. En tal caso, las propiedades de los tensores se reflejaban en las propiedades de los determinantes que el alumno del bachillerato ya conoce.

Al paso de los años, sigo pensando que es así la forma adecuada de explicar matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, ya que uno sabía, por un lado, porqué las definiciones eran las que eran, y por otro, llenarlo de sentido geométrico, como he repetido anteriormente. Todo esto viene reflejado en el libro de "Álgebra Lineal"de Alfonso Romero, profesor del departamento, del cual tantos hemos aprendido.

Con el nuevo grado, los contenidos de la Geometría I se han dividido en dos asignaturas, la Geometría I y la Geometría II, y el orden de los temas ha cambiado: se ha colocado como tema primero el cálculo matricial. Para el alumno que viene del instituto, esto le viene bien ya que conoce gran parte de los conceptos, aparte de que muchos de los ejercicios son 'mecánicos'. Si uno consulta el libro "Álgebra lineal con métodos elementales"de Luis Merino y Evangelina Santos podrá comprobar que se sigue este espíritu. Pero también tiene algunas desventajas, y destaco dos. La primera es la pérdida en parte del sentido a lo que se hace, o si se quiere, el sentido geométrico, ya que el alumno percibirá el tema como una sucesión de definiciones y resultados, algunos o muchos de ellos, algo artificiosos, y sin saber realmente para qué sirven. Como justo en este momento no se conoce lo que es un espacio vectorial o una aplicación lineal, las definiciones y los resultados pueden resultar a veces caprichosos. La segunda desventaja se refiere a la parte de las demostraciones, ya que muchas de ellas son tediosas al prescindir, de nuevo, del concepto de espacio vectorial.

Con estos apuntes voy a intentar dar un cierto orden a todos estos conceptos y hacer demostraciones rigurosas de los resultados, aunque algunas de ellas, se dejarán como ejercicio. También dejo al lector que si encuentran alguna errata me lo comunique para poder así mejorar estos apuntes.

2. Matrices

Definición 2.1 *Una matriz (real) de m filas y n columnas es una expresión de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Diremos que a_{ij} es el elemento de la matriz que está en el lugar i y columna j y a veces escribiremos $(A)_{ij}$ en vez de a_{ij}. También se dirá que A es de orden $m \times n$. El conjunto de todas las matrices $m \times n$ se denota por $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Aunque no se va a hacer, pero uno podría definir matrices de números enteros, de números racionales, de números complejos, o de lo que uno quisiera. Continuamos con algunas definiciones y propiedades.

- Si $m = n$ se dice que la matriz es cuadrada de orden n y el espacio se denotará por $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En tal caso, a todos los elementos a_{ii} se llaman la diagonal principal de la matriz.
- Una matriz es triangular superior (resp. triangular inferior) si $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (resp. $a_{ij} = 0, i < j$).
- Se denota por 0 la matriz en la que todos sus elementos (i, j) son 0. Se dice que es la matriz nula.
- La matriz identidad de orden n es la matriz $I_n = (\delta_{ij})$, donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ Cuando se sobreentienda el orden de la matriz, escribiremos simplemente I.

Definición 2.2 *En $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define la suma de matrices y el producto por escalares como*

$$+ : \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(A,B) \longmapsto A+B = (a_{ij}+b_{ij}) \qquad\qquad (\lambda,A) \longmapsto \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Algunas propiedades de la suma de matrices y el producto por escalares se recogen en la siguiente

Proposición 2.3 *Sean $A,B,C \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.*

1. $A+B = B+A$ *(conmutativa).*
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(asociativa)*
3. $A+0 = A$ *(elemento neutro)*
4. *Denotamos por $-A$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $-a_{ij}$. Entonces $A+(-A) = 0$. Se dice que $-A$ es la matriz opuesta de A.*
5. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ *(distributiva).*
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ *(seudoasociativa).*

Demostración. Las demostraciones son inmediatas y las dejamos al lector. Vamos sólo a probar dos de ellas para indicar cómo se hacen.

1. Probamos la propiedad asociativa de la suma. Consideramos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$. Para probar que la matriz $(A+B)+C$ es la matriz $A+(B+C)$, veamos que el elemento (i,j) de cada una de ellas es el mismo. Para la primera es $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$, donde se ha usado la definición de suma de *dos* matrices, tanto para hacer $A+B$ como para hacer $(A+B)+C$. Del mismo modo, el elemento (i,j) de $A+(B+C)$ es $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$. Por tanto, el problema se reduce a probar que $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$. Pero esto es evidente porque que tanto a_{ij}, b_{ij} como c_{ij} son números reales y usamos la propiedad asociativa de la suma de números reales para concluir.
2. La segunda propiedad que probamos es la seudoasociativa. El elemento (i,j) de la matriz $\lambda(\mu A)$ es $\lambda(\mu a_{ij})$ donde hemos usados dos veces la definición del producto de un escalar por una matriz: primero para hacer μA y luego para hacer λ por μA. Análogamente, el elemento (i,j) de la matriz $(\lambda\mu)A$ es $(\lambda\mu)a_{ij}$. Aquí sólo se ha

usado una vez la definición de un escalar por una matriz. Finalmente, quedaría por probar que $\lambda(\mu a_{ij})$ es igual a $(\lambda\mu)a_{ij}$, pero esto es evidente por (¡de nuevo!) las propiedades de números reales.

Uno puede darse cuenta que en la prueba de las otras propiedades, aparte de las definiciones, tiene que usar algunas propiedades de números reales. Por ejemplo, para demostrar la conmutatividad de la suma de matrices se usa que la suma de números reales es conmutativa. $\square$

En el lenguaje de ‘espacios vectoriales’, la proposición anterior nos dice simplemente que el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ constituye un espacio vectorial con la suma y producto por escalares definidos anteriormente. Esto ya se verá en el tema 2 de la asignatura.

Dada una matriz, cambiamos las filas por las columnas, es decir, la primera fila se convierte en la primera columna, la segunda fila, en la segunda colunma y así sucesivamente, y obtenemos una nueva matriz.

Definición 2.4 *Dada una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama matriz traspuesta de A a la matriz A^t donde $(A^t)_{ij} = a_{ji}$. Por tanto, $A^t \in \mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.*

Veamos a continuación algunas propiedades de la traspuesta de una matriz respecto de las operaciones sumay y producto por escalares.

Proposición 2.5 *Sean $A, B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
3. $(A^t)^t = A$.
4. $0^t = 0$, $I^t = I$.

Demostración. Las demostraciones son sencillas y sólo hacemos la primera. El elemento (i, j) de $(A+B)^t$ es $(A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$, donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$. Y el elemento (i, j) de $A^t + B^t$ es $(A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$, luego ambas matrices coinciden. $\square$

Definición 2.6 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Se dice que A es simétrica si $A^t = A$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$. Se denota por $S_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices simétricas de orden n.*
2. *Se dice que A es antisimétrica si $A^t = -A$, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j$. Se denota por $A_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices antisimétricas de orden n.*

Podemos ver las matrices simétricas como aquellas matrices cuadradas que al 'doblar' la matriz por la diagonal principal, el elemento (i, j) coincide con el (j,i). Por otro lado, nos podemos dar cuenta que los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos.

Es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 2.7 *La suma y producto por escalares de matrices simétricas (resp. antisimétricas) es de nuevo una matriz simétrica (resp. antisimétrica).*

También es sencillo de probar:

Teorema 2.8 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces existe una matriz simétrica $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y otra antismétrica $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = B + C$. Además, dichas matrices son únicas en el sentido que si $A = B' + C'$, donde $B' \in S_n(\mathbb{R})$ y $C' \in A_n(\mathbb{R})$, entonces $B = B'$ y $C = C'$.*

Demostración. Para la existencia, basta tomar $B = (A + A^t)/2$ y $C = (A - A^t)/2$ y darse cuenta que

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

y que usando la proposición 2.5,

$$B^t = \left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t + A}{2} = B,\ C^t = \left(\frac{A - A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t - A}{2} = -C.$$

Supongamos ahora que $A = B' + C'$, con $B \in S_n(\mathbb{R})$ y $C' \in A_n(\mathbb{R})$. De la igualdad $B + C = B' + C'$, se tiene que $B - B' = C' - C$. Esto quiere decir que $B - B' = C' - C \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$, es decir, $B - B' = C' - C$ es una matriz simétrica y antisimétrica a la vez. Finalmente hay que darse cuenta que la única matriz con dicha propiedad es la matriz cero, pues si D es una tal matriz, entonces $D^t = D$ y $D^t = -D$, luego $D = -D$ y así, $2D = 0$, o lo que es lo mismo, $D = 0$. Volviendo, concluimos que $B - B' = C' - C = 0$, es decir, $B = B'$ y $C = C'$. □

Definimos el producto de dos matrices. La correspondiente definición puede parecer extraña en un primer momento y no tan 'lógica' como la que se ha hecho anteriormente para la suma de matrices. Ya se justificará en el tema de aplicaciones lineales el porqué de la definición.

Definición 2.9 *Sean $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B =\in \mathscr{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$. Se define la matriz producto AB por*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

En particular, $AB \in \mathscr{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$.

Algunas observaciones que hay que hacer sobre el concepto de producto de matrices.

- Existe una condición necesaria dada por los órdenes de dos matrices para que se *puedan* multiplicar: el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

- No es cierto en general la propiedad conmutativa: si A y B son dos matrices como antes, puede suceder que ni se puedan multiplicar B por A por el problema de que no coincidan el número de columnas de B con las filas de A. Incluso en tal situación, tampoco tiene que darse la igualdad $AB = BA$, como muestra el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Si $AB = 0$, esto no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- No podemos 'simplificar', es decir, si A, B, C son tres matrices tales que $AB = AC$, no se tiene necesariamente que $B = C$. Siguiendo con el ejemplo anterior, si tomamos $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $AB = AC = 0$.

- Tampoco es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$: para ello es suficiente tomar dos matrices donde $AB \neq BA$.

Las siguientes propiedades del producto de matrices son fáciles de probar, aunque algo complicadas de escribir. Supondremos siempre que cuando tengamos una expresión del tipo AB, ya estamos suponiendo las condiciones sobre columnas y filas en A y B para que se puedan multiplicar.

Proposición 2.10

1. *$A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (distributiva).*
2. *$(AB)C = A(BC)$ (asociativa).*

3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

4. $(AB)^t = B^t A^t$.

5. *Si* $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *entonces* $I_m A = A = AI_n$.

Demostración. De nuevo, las demostraciones son sencillas y sólo probamos una, por ejemplo, $A(B+C) = AB+AC$. Para ello vamos a calcular el elemento (i,j) de cada una de las dos matrices y probar que son iguales. Con las notaciones usadas hasta ahora, y de la definición del producto de dos matrices, tenemos:

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + (B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ (AB+AC)_{ij} &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}. \end{aligned}$$

□

Definición 2.11 *Sea* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Se dice que A es regular (o invertible, o no singular) si existe* $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que*

$$AB = I_n = BA.$$

El conjunto de las matrices regulares de orden n se llama grupo lineal general y se denota por $Gl(n,\mathbb{R})$.

Observemos que tenemos dos igualdades, a saber, $AB = I_n$ y $BA = I_n$ ya que, como hemos visto antes, el producto de matrices no es una operación conmutativa. Además esto fuerza a que B también sea cuadrada del mismo orden que A. Sin embargo, se probará más tarde en el corolario 3.11 que si $AB = I_n$, entonces *necesariamente* $BA = I_n$.

La primera observación es que la matriz B es única, es decir, que si C es otra matriz tal que $AC = I_n = CA$, entonces $C = B$. Para ello, usando las propiedades del producto de matrices y de las propiedades de B y C, se tiene $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. A esta (única) matriz B se llama la *matriz inversa* de A y se denota por A^{-1}. Por tanto, tenemos $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Si uno tiene una matriz cuadrada y se pregunta si es regular, el problema no es fácil en el sentido de que para demostrarlo, tiene que *encontrar* la matriz inversa, lo cual se antoja en principio, difícil. Por ejemplo, si A es de orden 2, el problema equivale a resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Veamos un ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que tenemos que resolver el sistema

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y+2t & = & 0 \\ -x+2z & = & 0 \\ -y+2t & = & 1 \end{array}$$

En este caso las soluciones son $x = -y = 1/2$, $z = t = 1/4$, es decir,

$$A^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posteriormente tendríamos que comprobar que, efectivamente, el producto $A^{-1}A$ es también la identidad I_2. Si la matriz es de orden 3, tendríamos un sistema de ¡nueve ecuaciones y nueve incógnitas! y así sucesivamente.

Más tarde daremos condiciones para: 1) saber si una matriz es o no regular (teoremas 3.10, 3.16 y 4.9), sin tener que hallar la matriz inversa y 2) hallar la matriz inversa de una matriz regular.

Las propiedades de las matrices regulares vienen dadas por la siguiente proposición.

Proposición 2.12 *1. La matriz identidad es regular e $I_n^{-1} = I_n$.*

2. *Si A y B son regulares, también lo es AB y su inversa es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

3. *Si $\lambda \neq 0$ y A es regular, entonces λ es regular y su inversa es $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.*

4. *Si A es regular, A^t es regular y su inversa es $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

5. *Si A es regular, A^{-1} es regular y su inversa es $(A^{-1})^{-1} = A$.*

6. *Si una matriz cuadrada tiene una fila o una columna de ceros, entonces no es regular.*

Demostración. De nuevo la demostración es sencilla, con la ventaja de que el enunciado de la proposición ya nos dice cuál es la matriz inversa. Veamos, por ejemplo, la segunda propiedad. Probamos que la matriz $B^{-1}A^{-1}$ es, efectivamente, la inversa de AB. Usando la asociatividad del producto de matrices, y las definiciones de A^{-1} y B^{-1}, tenemos:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{1-}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = I_n.$$

Acabamos probando la última propiedad. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz y supongamos, sin perder generalidad, que su primera fila es de ceros, es decir, $a_{1j} = 0$ para $1 \leq j \leq n$. Si B es otra matriz cuadrada del mismo orden, al multiplicar AB, su primera fila también es de ceros, pues

$$(AB)_{1j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 0b_{kj} = 0,\ 1 \leq j \leq n.$$

Si A es regular, entonces al multiplicar por su inversa, la primera fila no es de ceros, ya que es la primera fila de la matriz identidad I_n. $\square$

3. Rango de una matriz

El objetivo de esta sección se definir el rango de una matriz. La idea es 'convertir' una matriz dada en otra más sencilla que estará formada por 1 y 0 y el número de unos sea fijo *indepedientemente* de las transformaciones que hagamos en la matriz original. También hay que definir qué tipos de transformaciones son las permitidas.

En $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ definimos las *matrices elementales* como:

1. F_{ij} es la matriz que resulta de la matriz identidad I al intercambiar la fila i por la j.
2. $F_i(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando multiplicamos la fila i por el escalar λ.
3. $F_{ij}(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando se suma a la i-fila la fila j multiplicada por λ.

Es posible indicar el elemento (k,l) de una matriz elemental. Para ello introducimos las matrices $E_{ij} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ que están definidas por tener un 1 en el lugar (i,j) y 0 en todos los demás. Esto se puede escribir por

$$(E_{ij})_{kl} = \delta ik\delta jl.$$

Así la matriz identidad I_m se escribe como $I_m = \sum_{i=1}^{m} E_{ii}$ y cada una de las matrices elementales como

$$F_{ij} = \sum_{k=1,k\neq i,j}^{m} E_{kk} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$F_i(\lambda) = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} E_{kk} + \lambda E_{ii}.$$

$$F_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{kk} + \lambda E_{ij}.$$

Observemos que la matriz identidad es una matriz elemental, sin más que escribir $I_m = F_1(1)I_m$. Cuando necesitemos escribir matrices elementales sin necesidad de describir a qué tipo de las tres pertenece, las denotaremos simplemente por F_i.

Proposición 3.1 *El producto de matrices elementales es una matriz elemental. Las matrices elementales son regulares con*

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij},\ F_i(\lambda)^{-1} = F_i(1/\lambda)(\lambda \neq 0), F_{ij}(\lambda)^{-1} = F_{ij}(-\lambda).$$

Demostración. Es sencilla sin más que multiplicar cada matriz elemental por su inversa indicada en el enunciado de la proposición y probar que, efectivamente, resulta la matriz identidad. Si queremos hacer el producto usando el conocimiento de los coeficientes (k,l) de cada una de las matrices indicadas anteriormente, los cálculos pueden ser algo farragosos, pero no difíciles. Como muestra de ello, veamos que $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$ probando que $F_{ij}F_{ij} = I_m$. Calculamos el elemento (k,l) de $F_{ij}F_{ij}$:

$$\begin{aligned}
(F_{ij}F_{ij})_{kl} &= \sum_{s=1}^{m} (F_{ij})_{ks}(F_{ij})_{sl} = \\
&= (\sum_{\substack{p=1\\ p\neq i,j}}^{m} E_{pp} + E_{ij} + E_{ji})_{ks}(\sum_{\substack{p=1\\ p\neq i,j}}^{m} E_{pp} + E_{ij} + E_{ji})_{sl} \\
&= \sum_{s=1}^{m}(\sum_{\substack{p=1\\ p\neq i,j}}^{m} \delta_{kp}\delta_{sp} + \delta_{ki}\delta_{sj} + \delta_{kj}\delta_{si})(\sum_{\substack{q=1\\ q\neq i,j}}^{m} \delta_{sq}\delta_{ql} + \delta_{si}\delta_{lj} + \delta_{sj}\delta_{li}) \\
&= (\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq i,j}}^{m} \delta_{kp}\delta_{sp} + \delta_{ki} + \delta_{kj})(\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{q=1\\ q\neq i,j}}^{m} \delta_{sq}\delta_{ql} + \delta_{lj} + \delta_{li})
\end{aligned}$$

Ahora no hay más que distinguir los casos en que $k,l \notin \{i,j\}, k \notin \{i,j\}, l = i, k \notin \{i,j\}, l = j$, $l \notin \{i,j\}, k = i$ y $l \notin \{i,j\}, k = j$, $k,l \in \{i,j\}$, y quedaría

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_{sk}\delta_{sl}$$

que es el elemento (k,l) de la matriz identidad. $\square$

Definimos las transformaciones permitidas para una matriz dada. Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y multiplicando por la izquierda por matrices elementales, obtenemos tres tipos de matrices, a saber:

1. $F_{ij}A$. Esta matriz resulta de A al intercambiar la fila i y la j.
2. $F_i(\lambda)A$. Esta matriz resulta de A multiplicando la fila i por λ.
3. $F_{ij}(\lambda)A$. Esta matriz resulta de sumar a la fila i de A, la fila j de A multiplicada por λ.

A cada una de las anteriores operaciones definidas en A se llama *transformación elemental (por filas)*. Ya que sólo nos interesa transformaciones elementales que resultan de producto de A por matrices elementales *regulares*, supondremos a partir de ahora que cuando se multiplica por una matriz elemental del tipo $F_i(\lambda)$, el escalar λ no es cero (si λ fuera 0, entonces la fila i sería de ceros y la última propiedad de la proposición 2.12 nos diría que no es regular).

Del mismo modo, se definen las transformaciones elementales *por columnas* de la matriz A, sin más que multiplicar a la derecha de A por matrices elementales. Hay que observar ahora que dichas matrices elementales son de orden n (debe coincidir con el número de columnas de A). En esta situación escribiremos dichas matrices por los símbolos C_{ij}, $C_i(\lambda)$ y $C_{ij}(\lambda)$. Y también, si no necesitamos indicar a qué tipo de las tres pertenece, escribiremos simplemente C_i.

Definición 3.2 *La matriz A se llama equivalente a B y escribiremos $A \sim B$, si se puede pasar de A a B por transformaciones elementales (por filas), es decir, si existen matrices elementales por filas $F_1,\dots,F_p$ tales que*

$$B = F_1 \cdots F_p A.$$

Proposición 3.3 *La relación binaria $\sim$ definida en el conjunto $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una relación de equivalencia.*

Demostración.

- (reflexiva). Ya que la matriz identidad I_m es una matriz elemental y $A = I_m A$, entonces $A \sim A$.

- (simétrica) Supongamos que $A \sim B$, es decir, $B = F_1 \cdots F_p A$. Multiplicando a izquierdas por $F_p^{-1} \cdots F_1^{-1}$, tenemos $A = F_p^{-1} \cdots F_1^{-1} B$. Ya que la inversa de una matriz elemental también es elemental, entonces $B \sim A$.
- (transitiva) Supongamos que $A \sim B$ y $B \sim C$. Entonces existen matrices elementales F_i y G_j tales que $B = F_1 \cdots F_p A$ y $C = G_1 \cdots G_q B$. Entonces $C = G_1 \cdots G_q F_1 \cdots F_p A$, es decir, $A \sim C$.

□

Una vez probado este resultado, si $A \sim B$ diremos simplemente que A y B son equivalentes (sin necesidad de distinguir qué matriz es la primera y cuál es la segunda).

De la misma se tendría otra relación de equivalencia trabajando con transformaciones por columnas.

Definición 3.4 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es una matriz escalonada (por filas) si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si A tiene filas de ceros, éstas se encuentran en las últimas filas de A.*
2. *El primer elemento no nulo de una fila no nula es un* 1. *A este elemento se llama elemento principal o pivote de dicha fila.*
3. *Cada pivote se encuentra en una columna posterior al pivote de la fila anterior.*

Además, s todos los elementos de la columna donde se encuentra el pivote son 0*, se dice que la matriz es escalonada reducida.*

De manera análoga se tiene el concepto de matriz escalonada reducida *por columnas*, es decir, una matriz donde las columnas de ceros se encuentran en las últimas columnas de la matriz, el primer elemento no nulo de la columna es un 1, y cada unos de estos unos, llamado pivote, se encuentra en una fila posterior a la fila del pivote de la columna anterior.

Las siguientes matrices son matrices escalonadas (por filas) pero no reducidas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y las siguientes son escalonadas reducidas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado es sencillo de probar, pero importante en lo que sigue.

Lema 3.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada escalonada reducida. Entonces A es regular si y sólamente si $A = I_m$.*

Demostración. Es evidente que la matriz identidad I_m es regular (y escalonada reducida).

Por otro lado, si A es una matriz escalonada reducida, el elemento a_{11} tiene que ser 1, pues en caso contrario, la primera columna sería de ceros y por tanto A no sería regular por 6) de la proposición 2.12. El siguiente pivote debe ser el elemento a_{22}, pues en caso contrario, es decir, si a_{2j}, $j > 2$, es el pivote de la segunda fila, el número de pivotes de A sería menor n, es decir, al menos la última fila debe ser de ceros y por tanto A no es regular. Razonando con el siguiente pivote, se prueba que los pivotes deben ser los elementos a_{ii} de la matriz A y ya que A es una matriz cuadrada, entonces $A = I_m$. $\square$

El siguiente paso, el cual es clave en toda esta sección, es que para una matriz dada, es posible hacer transformaciones elementales por filas y convertirla en una matriz escalonada reducida. Además esta matriz es única, es decir, aunque el número y tipo de transformaciones elementales que hagamos pueda variar de una persona a otra, la matriz escalonada reducida es la misma. Previamente, necesitamos el siguiente resultado que nos dice que si se tienen dos matrices escalonadas reducidas, una de ellas obtenida por transformaciones elementales de la otras, entonces ambas matrices son iguales.

Lema 3.6 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dos matrices escalonadas reducidas. Si $A \sim B$, entonces $A = B$.*

Demostración. No puede suceder que una matriz sea la matriz 0 y la otra no, porque las transformaciones elementales no cambia la matriz 0. Tomamos los pivotes $a_{1j} = 1$ y $b_{1k} = 1$ de la primera fila de las matrices A y B respectivamente. Si $j < k$, entonces la columna j de B es nula, es decir, $b_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$. También sabemos que $a_{ij} = 0$ para $i \geq 2$. Sin embargo las transformaciones elementales aplicadas a la matriz A deja algún elemento de la columna j no nula, lo cual no es posible. Esto prueba que $j \geq k$ e intercambiando los papeles de A y B, obtenemos $k \geq j$, es decir, $k = j$. Esto prueba que el pivote de la primera fila coincide para A y B. Como ambas son reducidas, entonces $a_{is} = b_{is}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq s \leq j$.

Tomamos ahora el siguiente pivote de A y B, es decir, el correspondiente a la segunta fila (si en una matriz, dicha fila es cero, entonces todas las demás son cero y no se podría pasar mediante transformaciones elementales de una matriz a la otra). Supongamos que son $a_{2p} = 1$ y $b_{2q} = 1$. Veamos que $p < q$ no puede ser. Si fuera así, en la matriz B

se tendría $b_{ij} = 0$ para $2 \leq i \leq m$ y $1 \leq j < q$. Supongamos que hay transformaciones elementales de B hasta obtener A. Para conseguir la fila 2, no podemos usar la primera fila de B, pues aparecería un 1 a la izquierda de b_{2q} justo en el lugar $(2, j)$ que viene del pivote b_{1j}. Por otro lado, usando las últimas $n-1$ filas de B y realizando transformaciones elementales, nunca se podrá conseguir un 1 en el lugar $(2, p)$. Esto prueba que $p \geq q$. De nuevo, cambiando A por B, tenemos la igualdad $p = q$.

Y así seguimos el proceso con la siguiente fila no nula de A y de B, hasta finalizar todas las filas. Observemos que la demostración se consigue en un número finito de pasos. □

Teorema 3.7 *Sea* $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1. *Existen transformaciones elementales (no únicas) sobre filas tales que* A *se convierte en una matriz escalonada reducida* $H_f(A)$*, es decir,*

$$H_f(A) = F_1 \dots F_p A,$$

donde F_i *son matrices elementales (por filas).*

2. *La matriz* $H_f(A)$ *es única y se llama forma normal de Hermite de* A *(por filas).*

Demostración. La unicidad viene dada por el lema anterior, ya que si A tuviera dos matrices escalonadas reducidas (por filas) obtenidas por transformaciones elementales de A, entonces ambas matrices serían equivalentes. El lema anterior nos dice que son iguales.

Probamos ahora la existencia de transformaciones elementales por filas que me convierte una matriz cualquiera A en una matriz escalonada reducida (por filas). Además, la demostración proporciona un *método* para hallarla. Mediante transformaciones de la forma F_{ij}, colocamos todas las filas nulas en las últimas filas de la matriz A. En cada una de las transformaciones elementales que se haga a A, llamaremos de nuevo por a_{ij} al elemento (i, j) de la nueva matriz. Tomamos la primera columna j no nula, y sea $a_{ij} \neq$ para cierto i. Mediante F_{1i} colocamos la fila i en la primera, obteniendo un número no nulo en el lugar $(1, 1)$. Con la transformación $F_1(1/a_{ij})$, dicho elemento se convierte en un 1, y será el primer pivote de la nueva matriz. Ahora hacemos 0 en todos los demas elementos no nulos de la matriz que se encuentran en los lugares (i, j) para $i \geq 2$ mediante apropiadas transformaciones del tipo $F_{i1}(-a_{ij}/a_{1i})$. Esto nos convierte la matriz A en una en las que los elementos que se encuentran en la misma columna del primer pivote (y debajo de él) son 0.

Pasamos ahora a la segunda fila (si ésta fuera nula, la matriz resultante ya es escalonada reducida) y nos olvidamos por ahora de la primera. Se toma la siguiente columna k no nula a la derecha de la columna j (recordemos que j nos indica la columna del pivote de la primera fila de A). Entonces algún elemento a_{ik}, con $i \geq 2$ es no nulo. Mediante una transformación del tipo F_{2i} colocamos un elemento no nulo en el lugar $(2,k)$. Mediante $F_2(1/a_{2k})$, dicho elemento se convierte en un 1, siendo el pivote de la segunda fila. Posteriormente, mediante transformaciones del tipo $F_{i2}(-a_{ik}/a_{2k})$, $i \geq 3$, vamos poniendo ceros debajo del elemento $(2,k)$, es decir, para todos los a_{sk} con $s \geq 3$.

Este proceso se va repitiendo, hasta acabar todas las columnas. Por construcción, la matriz obtenida es escalonada por filas. Queda por hacer 0 en los elementos por encima de todos los pivotes de A. Para el primero, a_{1j}, no hay nada que hacer. Para el segundo pivote, a saber, a_{2k}, se hacen transformaciones del tipo $F_{12}(-a_{1k})$, obteniendo un 0 en el lugar $(1,k)$. Y así se va haciendo para las siguientes columnas y para los elementos que se encuentra encima de los pivotes. $\square$

De la misma forma, se tendría la forma normal de Hermite por columnas de A y que denotamos por $H_c(A)$. Observemos que las matrices $H_f(A)$ y $H_c(A)$ no tiene porqué coincidir. Tomando, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene $H_f(A) = A$, ya que A es escalonada reducida, pero

$$H_c(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corolario 3.8 *Sean $A, B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $A \sim B$ si y sólamente si $H_f(A) = H_f(B)$.*

Demostración. Por definición de la forma normal de Hermite, existen matrices elementales tales que $A = F_1 \cdots F_p H_f(A)$ y $B = G_1 \cdots G_q H_f(B)$.

Supongamos que $A \sim B$. Entonces existen transformaciones elementales $H_1, \ldots, H_s$ tales que $B = H_1 \cdots H_s A$. Entonces

$$H_f(B) = G_q^{-1} \cdots G_1^{-1} B = G_q^{-1} \cdots G_1^{-1} H_1 \cdots H_s F_1 \cdots F_p H_f(A).$$

Por tanto, las matrices escalonadas $H_f(A)$ y $H_f(B)$ son equivalentes, y por el lema 3.6, son iguales.

Recíprocamente, si $H_f(A) = H_f(B)$, entonces

$$A = F_1 \cdots F_p H_f(B) = G_p^{-1} \cdots G_1^{-1} B$$

es decir, $A \sim B$. $\square$

Lema 3.9 *La forma escalonada reducida por columnas de una escalonada reducida por filas es una matriz de la forma*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Teorema 3.10 *Sea $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Entonces A es regular si y sólamente sus formas de Hermite por filas y columnas son la matriz identidad: $H_f(A) = H_c(A) = I_m$.*

Demostración. Sabemos que existen matrices elementales $F_1, \ldots, F_p$ tales que $H_f(A) = F_1 \cdots F_p A$. Si A es regular, entonces $H_f(A)$ es regular al ser producto de matrices regulares y por el lema 3.5, $H_f(A) = I_m$.

Recíprocamente, supongamos que $H_f(A) = I_m$. Como $A = F_p^{-1} \cdots F_1^{-1} H_f(A)$ y $H_f(A) = I_m$, entonces A es producto de matrices regulares, luego también es regular. $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar un resultado que quedó dicho pero no probado. Sea $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada tal que existe otra matriz cuadrada B del mismo orden tal que $AB = I_m$. Entonces A puede ser regular y B ser su inversa. Quedaría por probar que $BA = I_m$. Este problema ya se planteó cuando teníamos matrices concretas a las que había que calcular su inversa. Recordemos que el problema de encontrar B era equivalente a resolver un sistema de ¡m^2 ecuaciones y m^2 incógnitas!. Si somos capaces de resolver el sistema, se tenía que comprobar *posteriormente* que $BA = I_m$. El siguiente resultado nos dice que no es necesario esta 'comprobación'.

Corolario 3.11 *Sea $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz. Si existe $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ tal que $AB = I_m$ (o $BA = I_m$), entonces A es regular y $A^{-1} = B$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que A no es regular. El teorema anterior nos dice que su forma de Hermite $H_f(A)$ no es la identidad. Escribimos $A = F_1 \cdots F_p H_f(A)$. Entonces

$$I_m = AB = F_1 \cdots F_p H_f(A) B.$$

Como I_m es una matriz escalonada reducida, entonces I_m es la forma de Hermite por filas de $H_f(A)B$, en particular, es una matriz regular por el teorema. Como $H_f(A) \neq I_m$, al menos tiene una fila de ceros. Al multiplicar $H_f(A)$ por B, el producto también tiene una fila de ceros y por tanto, no puede ser regular. Esta contradicción prueba que $H_f(A) = I_m$ y el teorema asegura que A es una matriz regular.

Como A es regular, tiene inversa, A^{-1}. Multiplicando por la izquierda $AB = I_m$ por A^{-1}, concluimos que $B = A^{-1}$. $\square$

Por otro lado, el teorema nos proporciona también un *nuevo método* para el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Sabemos que existen matrices elementales (o transformaciones elementales de A) $F_1, \ldots, F_p$ tales que $I = F_1 \cdots F_p A$. Por tanto, el corolario anterior nos asegura que $A^{-1} = F_1 \cdots F_p = F_1 \cdots F_p I_m$. Esto quiere decir que, al hallar la forma de Hermite por filas de la matriz A, vamos realizando a la vez las mimas transformaciones elementales a la matriz identidad. En el momento que uno obtiene la forma de Hermite, tiene la matriz inversa. Además, no es necesario saber *a priori* si la matriz es regular, ya que una vez hallada la forma de Hermite por filas, será regular si y sólo si dicha matriz es la identidad. Veámoslo con un ejemplo.

Calculamos la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{21}(-2)\ F_{31}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{23}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto A es regular ya que su forma de Hermite es la identidad (la matriz de la izquierda) y su matriz inversa es la matriz de la derechas, es decir,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.12 *Sean $A, B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *$A \sim B$.*
2. *Existe una matriz regular $P \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ tal que $B = PA$.*
3. *$H_f(A) = H_f(B)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sabemos que existen matrices elementales tales que $B = F_1 \cdots F_p A$. Como las matrices elementales son regulares, $P := F_1 \cdots F_p$ es una matriz regular por el apartado 2) de la proposición 2.12, así $B = PA$.

2) $\Rightarrow$ 3) Del teorema 3.10, $P \sim I_m$, es decir, existen matrices elementales tales que $P = F_1 \cdots F_p I_m$. Por tanto, $B = F_1 \cdots F_p A$, es decir, $A \sim B$. Por el corolario 3.8, sus formas de Hermite por filas coinciden.

3) $\Rightarrow$ 1) Por definición de la forma de Hermite, $A \sim H_f(A)$ y como $H_f(A) = H_f(B) \sim B$, entonces $A \sim B$.

$\square$

Lema 3.13 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$H_f(H_c(A)) = H_c(H_f(A)).$$

Demostración. Sabemos que existen números naturales $r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$H_f(H_c(A)) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \ H_c(H_f(A)) = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Queda por probar que $r = s$. Sabemos que existen matrices elementales tales que

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = F_1 \cdots F_p \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) C_1 \cdots C_q.$$

En particular, y observando que la matriz de la derecha es producto de transformaciones elementales por filas por otra matriz, se tiene que $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ es la forma de Hermite por filas de $B := \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) C_1 \cdots C_q$.

Supongamos que $r > s$. Ya que el primer factor de B es $\left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, entonces las últimas $m - s$ filas son ceros. Pero haciendo transformaciones elementales de B para obtener su forma de Hermite por filas tiene, como mucho s pivotes y como $s < r$, nunca se podrá obtener la matriz $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Esta contradicción prueba que $r \leq s$. Intercambiando los papeles de r y s y razonando con las transformaciones elementales por columnas, se prueba que $s \leq r$, demostrando por tanto que $r = s$. $\square$

Gracias a este lema, podemos definir ahora el rango de una matriz.

Definición 3.14 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces existe un único número natural r, llamado el rango de A, $r(A)$, tal que*

$$H_f(H_c(A)) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

A esta matriz se le llama la forma normal de A. Es lo mismo que decir que existen producto de matrices elementales $F_1,\dots,F_p \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$, $C_1,\dots,C_q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que

$$F_1\cdots F_pAC_1\cdots C_q = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Además de la definición (que no del lema previo), para hallar el rango de la matriz A no es necesario hacer *primero* la forma de Hermite por *filas* y *luego* la forma de Hermite por *columnas*, sino ir combinando transformaciones por filas y/o columnas de A hasta obtener la matriz deseada. Esto se debe a que el producto $F_1\cdots F_pAC_1\cdots C_q$ puede verse de muchas formas usando la propiedad asociativa, como por ejemplo, $F_1\cdots(F_p(AC_1))\cdots C_q$.

A continuación demostramos algunas propiedades que tiene el rango de una matriz.

Teorema 3.15 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

1. *$r(A^t) = r(A)$.*
2. *El rango de S es el número de filas (resp. columnas) no nulas de una matriz escalonada por filas (resp. por columnas) equivalente o el número de pivotes de su forma de Hermite por filas (resp. por columnas).*
3. *$r(A) \leq \{n,m\}$.*
4. *El rango no cambia por transformaciones elementales (regulares).*
5. *Si B es una submatriz de A, entonces $r(B) \leq r(A)$.*

Demostración.

1. Si $r(A) = r$, sabemos que existen matrices elementales tales que $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = F_1\cdots F_pAC_1\cdots C_q$. Tomando traspuesta en esta identidad, tenemos

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0^t \\ \hline 0^t & 0^t \end{array}\right) = C_q^t\cdots C_1^tA^tF_1^t\cdots F_p^t.$$

Observemos que la matriz de la izquierda no es $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, pues ahora es de orden $n \times m$. Sin embargo es una del tipo para calcular el rango de A^t, concluyendo que es r de nuevo.

2. Para hallar el rango de A, calculamos primero $H_f(A)$. Si s es el número de pivotes, al calcular ahora su forma de Hermite por columnas, este número de pivotes se mantiene por transformaciones elementales por columnas, ya que éstas sólo hacen poner columnas de ceros a la derecha de la matriz y hace también ceros en la misma fila que el pivote (excepto éste). Por tanto dicho número coincide con el número de pivotes de $H_c(H_f(A))$, es decir, es rango de A.

3. Evidente por el apartado anterior.

4. Evidente ya que dichas transformaciones elementales son las que permiten el cálculo de las formas de Hermite por filas y por columnas.

5. Sea B una submatriz de A y supongamos que es de orden s. Después de reordenar filas y columnas, es decir, de mulplicar por matrices elementales del tipo F_{ij}, C_{ij}, colocamos dicha submatriz en las primeras s filas y s columnas de A. Al realizar las transformaciones elementales en A según el teorema 3.7, el número de pivotes que se obtengan de la matriz B son al menos los que se van a obtener de A, luego $r(B) \leq r(A)$.

$\square$

Por tanto, para calcular el rango de una matriz no es necesario obtener la forma de Hermite, sino obtener su forma normal de Hermite por filas (o por columnas)

Podemos extender la definición de equivalencia de matrices del siguiente modo: $A \sim B$ si existen matrices regulares P y Q tales que $B = PAQ$.

Teorema 3.16 *Sea $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Son equivalentes:*

1. *A es regular.*
2. *$r(A) = m$.*
3. *$A \sim I_m$.*
4. *$H_f(A) = I_m$.*

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$ Como A es regular, su forma de Hermite es I_m, luego el rango es el de I_m, es decir, m.

$2) \Rightarrow 3)$ Si $r(A) = m$ y m es el orden de A.

$3) \Rightarrow 4)$ Sabemos que dos matrices equivalentes tienen la misma forma de Hermite por filas y la forma de Hermite de I_m es I_m.

$4) \Rightarrow 1)$ Es el el teorema 3.10. $\square$

Corolario 3.17 *Sean $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathscr{M}_{n\times s}(\mathbb{R})$. Entonces $r(AB) \leq r(A), r(B)$.*

Demostración. Escribimos $A = F_1 \cdots F_p H_f(A)$. Entonces $AB = F_1 \cdots F_p H_f(A)B$ y como el rango no cambia por transformaciones elementales,

$$r(AB) = r(H_f(A)B).$$

Supongamos que $r(A) = r$, es decir, las últimas $m - r$ filas de $H_f(A)$ son cero. Por tanto la matriz $H_f(A)B$ tiene las últimas $m - r$ filas cero. Al calcular su forma de Hermite por filas, al menos, $m - r$ filas son cero, luego $r(H_f(A)B) \leq r$. Esto prueba que $r(AB) \leq r(A)$. De forma análoga, trabajando con columnas (o con $(AB)^t = B^t A^t$ y 1) del teorema 3.15), se prueba que $r(AB) \leq r(B)$. $\square$

Corolario 3.18 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces A no es regular si y sólamente si $r(A) < n$.*

4. Determinantes

Para definir el determinante de una matriz se necesita conocer previamente algo sobre el grupo de permutaciones. Sólo necesitaremos unas definiciones básicas y algunas propiedades que no demostraremos (pero que no son tan difíciles de probar). Una *permutación* de n elementos es una aplicación biyectiva de $X_n = \{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. En vez de representar dicha permutación como $\sigma : X_n \to X_n$, $\sigma : i \mapsto \sigma(i)$, escribiremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Está claro que hay $n!$ permutaciones de n elementos y al conjunto de todas las permutaciones lo denotamos por S_n.

Un *ciclo* de longitud m de X_n es una expresión del tipo $(i_1 i_2 \cdots i_m)$, donde estamos indicando una permutación σ que viene dada por

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_m) = i_1, \sigma(j) = j, j \neq i_1, \ldots, i_m.$$

Cuando tengamos dos ciclos (dos permutaciones), tenemos la *permutación producto* que no es más que componer una con la otra. Esto vendrá expresado del siguiente modo: si $\sigma_1 = (i_1 i_2 \cdots i_m)$, $\sigma_2 = (j_1 j_2 \cdots j_p)$ son dos ciclos, la composición la escribimos simplemente como $(i_1 i_2 \cdots i_m)(j_1 j_2 \cdots j_p)$, indicando la permutación $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Así, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(j_1) = \sigma_1(j_2)$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(j_2) = \sigma_1(j_3)$ y así sucesivamente.

Una *transposición* de X_n es un ciclo de longitud 2, es decir, del tipo $(i\,j)$. Con esto estamos describiendo una permutación σ que hace $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ y $\sigma(k) = k, k \neq i, j$. Algunos conceptos y propiedades que usaremos sobre permutaciones son las siguientes:

1. Toda permutación σ es producto de un número finito de transposiciones. Este número no es fijo, pero sí su paridad, es decir, o siempre es par, o siempre es impar. Denotamos por $|\sigma|$ el número de transposiciones que, aunque no es único, sí lo es el número $(-1)^{|\sigma|}$. Este número se llama la signatura de σ y no es más que 1 si el número de transposiciones es par o -1 si es impar.
2. La signatura de una transposición es -1.
3. Si $\sigma, \tau \in S_n$, la signatura de $\sigma\tau$ es el producto de la signatura de σ por la de τ.
4. Sea $\tau \in S_n$ una permutación fija. Entonces $S_n = \{\sigma\tau; \sigma \in S_n\}$.
5. La permutación identidad tiene signatura 1.
6. Sea σ una permutación y σ^{-1} su permutación inversa, es decir, aquélla tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$. Entonces la signatura de σ coincide con la de σ^{-1}. Además $S_n = \{\sigma^{-1}; \sigma \in S_n\}$.

Tenemos ahora las condiciones necesarias para decir qué es el determinante de una matriz cuadradas.

Definición 4.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define el determinante de A como*

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{1}$$

Diremos que $|A|$ es un determinante de orden n. También escribiremos $\det(A)$ en vez de $|A|$. Calculamos los determinantes para matrices de orden 1, 2 y 3.

1. $(n=1)$ Sea $A=(a_{11})$. Entonces $S_1=\{id\}$ y $|A|=a_{11}$.

2. $(n=2)$ Sea $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ahora $S_2=\{id,(12)\}$ y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

3. $(n=3)$. El grupo S_3 es $S_3=\{id,(123),(132),(12),(13),(23)\}$. Las tres primeras permutaciones tienen signatura 1, ya que $(123)=(13)(12)$ y $(132)=(12)(13)$. Entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Como uno puede observar, el cálculo del determinante de una matriz es algo tedioso. Pensemos que para $n=4$ aparecen ¡24 sumandos! Sin embargo, vamos a dar algunas propiedades de determinantes que nos va a simplificar dicho cálculo. La primera nos va a decir que cuando tengamos un determinante de orden n, podemos reducirlo a una suma de determinantes de orden $n-1$, y aplicando de nuevo este hecho, al final tendríamos determinantes de orden 3, o de orden 2. Este método es el que se llama *desarrollar un determinante por una fila* o por una columna. Por ahora vamos a reducir el trabajo a desarrollar el determinante por la *primera* fila. Para explicar este método, vamos a fijarnos de nuevo en los determinantes de orden 2 y de orden 3. Para éste último, la expresión anterior la podemos escribir como

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}|A_{11}|-a_{12}|A_{12}|+a_{13}|A_{13}| = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{1+i}a_{1i}|A_{1j}|,\end{aligned}$$

donde A_{1j} es la submatriz de A obtenida de ésta al quitar la fila 1 y columna j. Decimos entonces que hemos desarrollado el determinante por la primera fila. Por tanto, el determinante de orden 3 se reduce al cálculo de determimantes de orden 2, los cuales son más sencillos de computar. También se puede hacer algo parecido para determinantes de orden 2. Así,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22})-a_{12}(a_{21}) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{1+i}a_{1i}|A_{1j}|.$$

Veamos que esto sucede en general.

Proposición 4.2 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} |A_{1j}|, \tag{2}$$

donde A_{ij} la submatriz que resulta de quitar de A la fila i y la columna j.

Demostración. Para calcular $|A|$ nos fijamos en los $n!$ sumandos que aparecen en (1) y vamos a agruparlos en n grupos, cada uno de ellos con $(n-1)!$ elementos. Para cada $1 \leq k \leq n$, se define $T_k = \{\sigma \in S_n; \sigma(1) = k\}$ el conjunto de las permutaciones que llevan el número 1 en k. Entonces (1) se escribe como

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \sum_{\sigma \in T_1} (-1)^{|\sigma|} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + a_{12} \sum_{\sigma \in T_2} (-1)^{|\sigma|} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \ldots \\ &+ a_{1n} \sum_{\sigma \in T_n} (-1)^{|\sigma|} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \sum_{\sigma \in T_j} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que cada uno de los sumandos que aparecen en esta expresión coinciden con los que aparecen en (2).

Tomamos el primer sumando. A cada permutación de T_1 (que hace $1 \mapsto 1$) le asocio la permutación de $\{2, \ldots, n\}$, que consiste simplemente en quitar $1 \mapsto 1$. Así tendríamos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \longmapsto \tau := \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Es evidente que el número de permutaciones de τ coinciden con las de σ, y por tanto, también su signatura. Entonces

$$\sum_{\sigma \in T_1} (-1)^{|\sigma|} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{|\tau|} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = |A_{11}|.$$

Tomamos ahora el segundo sumando. De nuevo, a cada permutación $\sigma \in T_2$ le asociamos una permutación de $\{1, 3, \ldots, n\} = \{\sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)\}$ (que es de $(n-1)$ elementos) que consiste de nuevo en quitar $1 \mapsto 2$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \longmapsto \tau := \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Respecto del número de transposiciones puede uno darse cuenta que el número de transposiciones de τ es una menos que el de σ, es decir, $|\sigma| = |\tau| + 1$. Por tanto, la signatura de σ es la opuesta de τ. Entonces

$$\sum_{\sigma \in T_2} (-1)^{|\sigma|} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = -\sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^{|\tau|} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = -|A_{12}|.$$

Ahora vendría el sumando correspondiente a a_{13} y el número de transposiciones para cada $\sigma \in T_3$ es el de τ (donde se permutan $\{1,2,4,\ldots,n\}$) más 2. Y así se haría para cada uno de los sumandos. $\square$

A continuación enunciamos algunas propiedades de los determinantes. Para expresarlas mejor, introducimos la siguiente notación (que sólo se usará en el siguiente teorema). Si A es una matriz cuadrada, escribiremos $A = (f_1,\ldots,f_n)$ indicando cada una de las filas de A, es decir, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, $f_i = (a_{i1}a_{i2}\ldots\ a_{in})$.

Teorema 4.3 *En lo que sigue, $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $|A^t| = |A|$.
2. *Si en una matriz se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo, es decir,*
$$det(f_1,\ldots,f_q,\ldots,f_p,\ldots,f_n) = -det(f_1,\ldots,f_p,\ldots,f_q,\ldots,f_n).$$
3. *Si dos filas son iguales, el determinante es cero:* $det(f_1,f_1,f_3,\ldots,f_n) = 0$.
4. *Si una fila de A es* 0*, el determinante es* 0*:* $det(0,f_2,\ldots,f_n) = 0$.
5. *Si una fila se multiplica por $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el determinante resultante se multiplica por λ:*
$$det(f_1,\ldots,\lambda f_i,\ldots,f_n) = \lambda det(f_1,f_2,\ldots,f_n).$$
6. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
7. $det(b+c,f_2,\ldots,f_n) = det(b,f_2,\ldots,f_n) + det(c,f_2,\ldots,f_n)$.
8. *Si una fila se sustituye for ella más una combinación lineal de las demás, el determinante no cambia:*
$$det(f_1 + \sum_{i=2}^{n} f_i, f_2,\ldots,f_n) = det(f_1,\ldots,f_n).$$
9. *Si una fila es combinación lineal de las demás, entonces el determinante es cero:*
$$det(\sum_{i=2}^{n} f_i, f_2,\ldots,f_n) = 0.$$

Demostración.

1. Escribimos la definición del determinante de A^t usando (1) y que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$:
$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$
Escribimos $\sigma(i) = j$, luego $i = \sigma^{-1}(j)$. Por tanto, en cada uno de los sumandos anteriores, cada uno de los factores $a_{\sigma(i)i}$ se expresa como $a_{j\sigma(j)}$, por tanto, el producto $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ es $a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$ donde se han reordenado los factores. Entonces
$$\begin{aligned} |A^t| &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} (-1)^{|\sigma^{-1}|} a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= |A|, \end{aligned}$$
donde se ha usado que la signatura de σ^{-1} es la misma que la de σ y que $S_n = \{\sigma^{-1}; \sigma \in S_n\}$.

2. Sea $\tau \in S_n$ fijo. Usando la definición de determinante,
$$\begin{aligned} det(f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_p, \ldots, f_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\sigma(q)} \cdots a_{q\sigma(p)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|+|\tau|} a_{1\sigma\tau(1)} \cdots a_{p\sigma\tau(q)} \cdots a_{q\sigma\tau(p)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)} \end{aligned}$$
donde en la última igualdad hemos usado que $S_n = \{\sigma\tau; \sigma \in S_n\}$ y que las transposiciones de $\sigma\tau$ es la suma de las transposiciones de σ y de las de τ. Tomamos $\tau = (pq)$, es decir, la transposición $p \leftrightarrow q$. Entonces $|\tau| = 1$ y tenemos
$$\begin{aligned} det(f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_p, \ldots, f_n) &= -\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{q\sigma(q)} \cdots a_{p\sigma(p)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= -det(f_1, \ldots, f_p, \ldots, f_q, \ldots, f_n). \end{aligned}$$

3. Es consecuencia de 2).

4. Después de un cambio de filas, podemos suponer que la primera fila es cero (al cambiar las filas, el determinante sólo cambia de signo). Ahora desarrollamos por la primera fila, obteniendo que el determiante es 0.

5. Por la definición de determinante,
$$\begin{aligned} det(f_1, \ldots, \lambda f_i, \ldots, f_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda |A|. \end{aligned}$$

6. Es consecuencia del apartado anterior.

7. Supongamos que $b = (b_{11} \dots b_{1n})$ y $c = (c_{11} \dots c_{1n})$. Entonces

$$\begin{aligned} det(b+c, f_2, \dots, f_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} (b_{1\sigma(1)} + c_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} b_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} c_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= det(b, f_2, \dots, f_n) + det(c, f_2, \dots, f_n) \end{aligned}$$

8. Es consecuencia de 3) y 7).

9. Es consecuencia de 3) y 7).

$\square$

Corolario 4.4 *Se puede desarrollar por cualquier fila, es decir, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$,*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Demostración. Por la propiedad 2) del teorema anterior, nos llevamos la fila i a la primera y desarrollamos por la primera fila usando la proposición 4.2. El determinante ha cambiado de signo. Sin embargo, cada uno de los factores que van acompañando a a_{ij} es el determinante de la matriz que resulta de A_{ij} al intercambiar la primera fila por la fila i, luego, el valor de ese determinante es justamente $-|A_{ij}|$, concluyendo el resultado que buscamos. $\square$

Corolario 4.5 *En todas las propiedades anteriores, se puede cambiar 'filas' por 'columnas'.*

Demostración. Es consecuencia de que $|A^t| = |A|$. $\square$

Corolario 4.6 *La única matriz escalonada reducida y cuadrada con determinante no nulo es la matriz identidad.*

Demostración. Si la matriz tiene una fila o columna nula, desarrollando por ella, su determinante es cero (propiedad 4) del teorema 4.3). Por tanto, ningula fila es nula, lo que fuerza que cada pivote se encuentra en la columna siguiente al pivote de la fila anterior, probando que la matriz es la identidad. □

A continuación probamos que el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas. En la demostración no vamos a usar la definición de determinante. La hacemos en varios pasos.

Lema 4.7 *Consideramos las matrices elementales en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces*

1. $|I_n| = 1$.
2. $|F_{ij}| = -1$.
3. $|F_i(\lambda)| = \lambda$.
4. $|F_{ij}(\lambda)| = 1$.

En particular, el determinante de una matriz elemental (regular) no es 0.

Demostración.

1. Es trivial sin más que desarrollar por la primera fila reiteradamente.
2. Es la propiedad 2) del teorema 4.3.
3. Es la propiedad 5) del teorema 4.3.
4. Es la propiedad 8) del teorema 4.3 y que el determinante de I_n es 1.

□

Probamos ahora la propiedad del determinante del producto para un caso particular.

Lema 4.8 *Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donde A es una matriz elemental. Entonces $|AB| = |A||B|$.*

Demostración. Distinguimos los distintos casos.

1. Si A es F_{ij}, es la propiedad 2) del teorema 4.3.

2. Si A es $F_i(\lambda)$, es la propiedad 5) del teorema 4.3.
3. Si A es F_{ij}, es la propiedad 8) del teorema 4.3.

$\square$

De este lema, concluimos el siguiente resultado

Teorema 4.9 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Son equivalente los siguiente enunciados:*

1. *A es regular.*
2. *$r(A) = n$.*
3. *$|A| \neq 0$.*

Demostración. Ya sabemos por el teorema 3.16 que (1)$\Leftrightarrow$(2).

1)$\Rightarrow$3) Supongamos que A es regular. Entonces su forma de Hermite normal es la identidad, es decir, existen matrices elementales $F_1, \ldots, F_p$ tales que $A = F_1 \cdots F_p I_n$. Usando el lema anterior de forma reiterada, concluimos que $|A| = |F_1| \cdots |F_p||I_n| \neq 0$, ya que los determinantes de las matrices elementales no son 0 (lema 4.7).

3)$\Rightarrow$ 1) Sea ahora una matriz cuadrada A con determinante no nulo. De nuevo, existen matrices elementales $F_1, \ldots, F_p$ tales que $H_f(A) = F_1 \cdots F_p A$. Por el lema, $|F_1 \cdots F_p A| = |F_1| \cdots |F_p||A| \neq 0$. Pero la única matriz escalonada reducida y cuadrada con determinante no nulo es la identidad (corolario 4.6). Usamos ahora el teorema 3.16 para asegurar que la matriz es regular. $\square$

Teorema 4.10 *Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces $|AB| = |A||B|$.*

Demostración. Distinguimos dos casos:

1. Supongamos que A es regular. Entonces existen matrices elementales $F_1, \ldots, F_p$ tales que $A = F_1 \cdots F_p I_n$. De esta forma, $AB = F_1 \cdots F_p B$ y usando el lema 4.8 tenemos
$$|AB| = |F_1 \cdots F_p||B| = |A||B|.$$
2. Supongamos ahora que A no es regular. Entonces el teorema 4.9 anterior dice que $|A| = 0$, luego $|A||B| = 0$. Por otro lado, $r(A) < n$ y usando el corolario 3.17, $r(AB) \leq r(A) < n$, es decir, AB no es regular. Aplicamos el teorema 4.9 para concluir que $|AB| = 0$.

$\square$

Corolario 4.11 *Si A es una matriz regular, entonces* $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Demostración. Es consecuencia del anterior teorema y que $AA^{-1} = I_n$. $\square$

El teorema 4.9 nos relaciona, en cierto sentido, el concepto de rango de una matriz con el de determinante. Concretamente, gracias a dicho teorema, y para una matriz *cuadrada*, sabemos que si el determinante no es cero, el rango es el máximo, esto es, n. Sin embargo si el determinante se anula no sabemos el valor exacto del rango. Damos ahora un resultado que nos resuelve completamente este problema.

Previamente damos el concepto de menor de una matriz. Un menor de una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el determinante de una submatriz cuadrada suya y diremos que el menor es de orden p si la submatriz es de orden p. El número de menores es grande. Así, hay mn menores de orden 1 y $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ menores de orden 2.

Teorema 4.12 *Sea* $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Entonces el rango de A es r si y sólamente hay un menor de orden r no nulo y todos los menores de orden* $r+1$ *son* 0*.*

Demostración. Supongamos que el rango de A es r. Entonces, existen matrices elementales $F_1,\ldots,F_p,C_1,\ldots,C_q$ tales que

$$F_1 \cdot F_p A C_1 \cdots C_q = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Para la matriz $R = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ es evidente que hay un menor de orden r no nulo, el correspondiente a la submatriz I_r y que todos los menores de orden $r+1$ son cero ya que en cada submatriz de orden $r+1$ habrá una fila y una columna de ceros, luego su determinante es cero. Si ahora realizamos las transformaciones inversas a la matriz R, la submatriz I_r se corresponde con otra submatriz de orden r cuyo determinante no es el mismo que I_r, es decir, 1, pues el producto por matrices elementales cambia el valor del determiante. Sin embargo, dicho determinante no es nulo ya que las matrices elementales son regulares. Esto prueba al existencia de dicho menor.

Por el mismo motivo, las submatrices de orden $r+1$ de R se corresponden con submatrices de orden $r+1$ en A obtenidas después de transformaciones elementales. Como los menores originales en R son 0, también lo serán para la matriz A. $\square$

Observemos que si los menores de orden $r+1$ son cero, también lo son los de orden mayor, sin mayor que ir desarrollando por una fila o una columna, pues el orden del menor se reduce en uno.

Según este resultado, tendríamos que calcular muchos menores para calcular el rango de la matriz. Sin embargo, se puede 'reducir el esfuerzo' del siguiente modo.

Corolario 4.13 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Supongamos que existe una submatriz M de orden r con determinante no nulo. Si todas los menores obtenidos al añadir una fila y una columna a M son nulos, entonces el rango de la matriz es r.*

Demostración. Después de reordenar filas y columnas (que no hace cambiar el rango de A) suponemos que la submatriz M se corresponde con las primera r filas y r columnas. Empezamos a calcular la forma de Hermite por filas de A. El hecho de que M tenga rango r asegura que después de transformaciones elementales por filas de A, los elementos (i,j) con $1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq m$ sean 0. Además, podemos convertir, mediante estas transformaciones, la submatriz M en la matriz I_r, obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \hline & O & & A'_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right).$$

Mediante estas transformaciones, las submatrices que resultan de añadir filas y columnas a la matriz M se han convertido en submatrices que resultan de añadir filas y columnas a la matriz I_r, cuyos determinantes habrán cambiado, pero no el hecho de ser o no ser nulos, ya que se han multiplicado por matrices elementales que son regulares. Esto quiere decir que podemos considerar que los menores de orden $r+1$ obtenidos de añadir filas y columnas a I_r son todos nulos.

Añadimos a I_r la fila $r+1$ y columna $r+1$. La submatriz correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & a'_{1r+1} \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & a'_{rr+1} \\ \hline & O & & a'_{r+1r+1} \end{array}\right).$$

El menor correspondiente es a'_{r+1r+1}, el cual debe ser cero por hipótesis.

Si vamos fijando la fila $r+1$ y vamos cambiando de columnas, se prueba que la fila $r+1$ es nula. Haciendo esto con las restantes filas, demostramos que la matriz A es equivalente a una del tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \hline & O & & 0 \end{array}\right).$$

Pero esta matriz es escalonada reducida y por tanto tiene rango r. $\square$

Para finalizar esta sección, vamos a dar un método para hallar la matriz inversa de una matriz regular. Además nos servirá para probar la fórmula de Cramer de la siguiente sección. Para ello necesitamos dar la siguiente

Definición 4.14 *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, se define la matriz adjunta como $A^* \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donde*

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|,$$

y A_{ij} es la matriz que resulta de A de quitar la fila i y la columna j.

Teorema 4.15 *Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces:*

1. *Para cada $1 \leq i \leq n$, $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A^*_{ij}$.*
2. *Para cada $1 \leq i,k \leq n$, $i \neq k$, $0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}A^*_{kj}$.*
3. *$(A^*)^t = (A^t)^*$.*

El resultado nos dice que si cogemos la misma fila en A y en A^* y multiplicamos elemento a elemento y sumamos, obtenemos el determinante, pero si hacemos la misma operaciones para filas diferentes, entonces es 0.

Demostración.

1. La igualdad no es más que el desarrollo del determinante por la fila i.
2. La expresión $\sum_{j=1}^n a_{ij}A^*_{kj}$ es el desarrollo por la fila i de la matriz que resulta de la matriz A al sustituir la fila i por la fila k. Como hay dos filas iguales, el determinante es 0.
3. Evidente.

$\square$

El apartado 1) del anterior teorema se puede escribir como

$$A(A^*)^t = |A|I_n. \tag{3}$$

Efectivamente, el elemento (i,j) de $A(A^*)^t$ es

$$(A(A^*)^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a^*_{jk} = |A|\delta_{ij}.$$

En el caso de que A sea regular, podemos escribir (3) como

$$A\frac{1}{|A|}(A^*)^t = I_n.$$

De esta igualdad, concluimos.

Teorema 4.16 *Si A es una matriz regular, entonces su matriz inversa es*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}|(A^t)^*| = \frac{1}{|A|}|(A^*)^t|. \tag{4}$$

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 5.1 *Un sistema de ecuaciones lineales de n incógnitas $x_1,\ldots,x_n$ y m ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de la forma:*

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Los términos b_i se llamarán términos independientes. *También se escribirá el sistema como $Ax = b$, donde*

$$A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), x = (x_i) \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), b = (b_i) \in \mathscr{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}).$$

Si $b = 0$, el sistema se llama homogéneo.

Si el sistema tiene solución se dice que es compatible y si la solución es única, se dice que es compatible determinado. Si tiene más de una solución, se dice que el sistema es compatible indeterminado. Si el sistema no tiene solución, se dirá que es incompatible.

La matriz A se lama la matriz de los coeficientes y la matriz de juntar A con b, $(A|b)$, matriz ampliada.

Hay que notar que podemos hacer transformaciones elementales por filas en el sistema original, y el carácter de ser compatible o incompatible, determinado o indeterminado, no cambia.

Proposición 5.2 *Sea $P \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ una matriz regular. Entonces el sistema $Ax = b$ es equivalente a $PAx = Pb$, es decir, el conjunto de soluciones de uno (si hubiera) es el mismo que el del otro.*

Demostración. Efectivamente, si $y \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ es una solución de $Ax = b$, también lo es de $PAx = Pb$ pues $PAy = P(Ay) = Pb$. Recíprocamente, si y es solución de $PAx = Pb$, entonces $PAy = PB$. Multiplicando a izquierda por P^{-1} tenemos $Ay = b$. □

Observemos que el resultado anterior no sirve necesariamente si hacemos transformaciones elementales por columnas. Concretamente, si la transformación es del tipo C_{ij}, el sistema es equivalente, ya que sólo hemos renombrado la incógnita x_i por x_j y la x_j por x_i. Sin embargo si multiplicamos una columna por λ, las soluciones cambian y el sistema puede pasar de compatible a incompatile o de incompatible a compatible. Como un ejemplo sencillo, tenemos el siguiente. El sistema

$$x + y = 2$$

$$x - y = 0$$

tiene como solución $x = 1$, $y = 1$. Si multiplicamos la segunda columna de A por 2, el sistema es

$$x + 2y = 2$$

$$x - 2y = 0$$

cuya solución es $x = 1$, $y = 1/2$.

El siguiente resultado nos dice que si conocemos una solución del sistema $Ax = b$ y las soluciones del sistema homogéneo correspondiente, entonces tenemos todas las soluciones del sistema original.

Proposición 5.3 *Sea x_0 una solución de $Ax = b$. Entonces*

$$\{\textit{soluciones de Ax=b}\} = x_0 + \{\textit{soluciones de Ax=0}\}.$$

Demostración. Sea y una solución de $Ax = b$. Entonces podemos escribir $y = y + (x_0 - y)$ y $x_0 - y$ es una solución del sistema homogéneo ya que $A(x_0 - y) = Ax_0 - Ay = b - b = 0$.

Por otro lado, si z es una solución de $Ax = 0$, entonces $x_0 + z$ es una solución del sistema original, ya que $A(x_0 + z) = Ax_0 + Az = b + 0 = b$. □

El resultado anterior nos indica que es necesario estudiar sistemas homogéneos.

Teorema 5.4 *Sea un sistema homogéneo $Ax = 0$. Entonces el sistema es compatible. Además,*

1. *Si $r(A) = n$, el sistema es compatible determinado y la solución trivial ($x = 0$) es la única.*
2. *Si $r(A) < n$, el sistema es compatible indeterminado.*

Demostración. Observemos que $r(A) \leq n$. Por un lado, es evidente que $x = 0$ es una solución de $Ax = 0$, pues $A0 = 0$. Esto prueba que el sistema es compatible.

Sea $r = r(A)$. La submatriz de A de rango r cuyo menor es no nulo la colocamos en las primeras r filas y r columnas de A. El sistema resultante sigue siendo equivalente al original ya que la reordenación de las columnas es lo mismo que una reordenación en la forma de llamar a las incógnitas. Después de transformaciones elementales por filas, y como el rango de A es r, el sistema cambia a $A'x = 0$, donde

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & a'_{ij} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hacemos $x_i = \lambda_i$ para $r + 1 \leq i \leq n$. Entonces podemos despejar $x_1, \ldots, x_r$, obteniendo:

$$\begin{aligned} &x_1 = -\lambda_{r+1} a'_{1r+1} - \ldots - \lambda_n a'_{1n} \\ &x_2 = -\lambda_{r+1} a'_{2r+1} - \ldots - \lambda_n a'_{2n} \\ &\ldots \\ &x_r = -\lambda_{r+1} a'_{rr+1} - \ldots - \lambda_n a'_{rn} \end{aligned}$$

Si $r(A) = r = n$, entonces no existen λ_i y quedaría $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Si $r < n$, entonces habría infinitas soluciones, tantas como elecciones podamos hacer de λ_i. Además podemos escribir el conjunto de soluciones como

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_{r+1} \begin{pmatrix} a'_{1r+1} \\ \vdots \\ a'_{rr+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_i \in \mathbb{R}, r+1 \leq i \leq n \right\}$$

Este conjunto también lo escribimos como

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \lambda_{r+1} s_{r+1} + \ldots + \lambda_n s_n; \lambda_i \in \mathbb{R}, r+1 \leq i \leq n\} :=< s_{r+1}, \ldots, s_n >,$$

donde cada $s_i \in \mathbb{R}^n$, $r+1 \leq i \leq n$, viene dada por la matriz columna correspondiente. □

En el caso anterior, cuando $r < n$, diremos que el conjunto de soluciones tiene *dimensión* $n - r$. Como consecuencia tenemos:

Corolario 5.5 *Un sistema de ecuaciones lineales compatible o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.*

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado más importante de esta sección y que nos da una respuesta completa a la clasificación de un sistema de ecuaciones lineales en términos de rangos de matrices.

Teorema 5.6 (Rouché-Frobenius) *Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, se tiene:*

1. *El sistema es compatible si y sólamente si $r(A) = r(A|b)$. En este caso, tenemos:*
    a) *El sistema compatible determinado si y sólamente si $r(A) = n$.*
    b) *El sistema es compatible indeterminado si y sólamente si $r(A) < n$ y la dimensión de las soluciones es $n - r(A)$. Además el conjunto de soluciones es el siguiente: si $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ es una solución concreta, entonces todas las soluciones son $(x_1^0, \ldots, x_n^0) + < s_{r+1}, \ldots s_n >$, donde $\{s_{r+1}, \ldots, s_n\}$ es una solución de $Ax = 0$.*
2. *El sistema es incompatible si y sólamente si $r(A) \neq r(A|b)$.*

Demostración. Consideramos la matriz $(A|b)$ y supongamos que $r(A) = r$. De la misma forma que en la demostración del teorema anterior, colocamos la submatriz de orden r cuyo menor es no nulo en las primeras r filas y r columnas de A. Realizamos de nuevo transformaciones elementales por filas, obteniendo

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & & \\ & \ddots & & a'_{ij} & b'_i \\ & & 1 & & \\ \hline & O & & 0 & b'_i \end{array}\right) \tag{5}$$

y la submatriz de 1 es I_r. Por tanto, si ahora ponemos las incógnitas x_i, el sistema tiene solución si y sólamente si $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, es decir, si y sólamente si $r(A|b) = r$. Esto prueba el criterio del teorema para saber si el sistema es o no es compatible.

En el caso de que sea compatible, es decir, $b'_i = 0$ para $r+1 \leq i \leq m$, sólo queda despejar de forma parecida que se hizo en el caso homogéneo, obteniendo ahora

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{r+1} \begin{pmatrix} a'_{1r+1} \\ \vdots \\ a'_{rr+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_i \in \mathbb{R}, r+1 \leq i \leq n \right\} \tag{6}$$

□

Corolario 5.7 *Un sistema homogéneo siempre es compatible. Además la solución nula es la única si y sólamente si* $|A| \neq 0$*.*

El teorema de Rouché-Frobenius no sólo nos da un criterio para saber si un sistema de ecuaciones lineales tiene o no tiene solución, sino que nos da un *método* para hallarlas. Esta forma no es nada más que hallar el rango de la matriz A hallando su forma de Hermite por filas. Lo llamamos el *método según la forma de Hermite por filas*. Describimos los pasos:

1. Hallamos la forma de Hermite por filas de la matriz A, pero trabajando también con el término independiente, es decir con $(A|b)$.

2. Si $r = r(A)$, después de reordenar las incógnitas, colocamos una submatriz orden y rango r en la primeras r filas y columnas.

3. Computamos definitivamente la forma de Hermite por filas de A (o de $(A|b)$), obteniendo una expresión de la forma (5).

4. Despejamos x_i para $1 \leq i \leq r$ como en (6) y las demás incógnitas son tomadas como parámetros $x_i = \lambda_i$, $r+1 \leq i \leq n$.

Otro método es parecido al anterior pero sin la necesidad de transformar la submatriz de rango r en la identidad I_r. El método lo llamamos *método de Gauss*.

1. Vamos haciendo transformaciones elementales por filas de A (y a la vez en $(A|b)$) de forma que, después de reordenar las incógnitas, tenemos una submatriz de rango r colocada en las primeras r filas y r columnas.

2. Vamos haciendo ceros, para ir obteniendo la forma de Hermite, para sólamente obtener una forma *escalonada* de $(A|b)$.

3. No hace falta que el primer elemento no nulo de la fila sea un 1.

4. Entonces la matriz $(A|b)$ quedaría como

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c|c} a'_{11} & * & & & \\ & \ddots & & a'_{ij} & b'_i \\ & & a'_{rr} & & \\ \hline & O & & 0 & 0 \end{array}\right).$$

5. Tomamos $x_i = \lambda_i$ para $r+1 \leq i \leq n$ y empezamos a despejar x_r de la última ecuación, obteniendo

$$x_r = \frac{1}{a'_{rr}}\left(b'_r - \lambda_{r+1}a'_{rr+1} - \ldots - \lambda_n a'_{rn}\right).$$

   Con dicho valor, vamos a la ecuación correspondiente a fila $r-1$, despejamos x_{r-1}, y así continuamos con la fila $r-2$, hasta llegar a la primera.

El último método es el llamado método de Cramer. Para ello hay que observar que en los dos métodos anterior, el sistema de ecuaciones de ha ‘convertido’ en un sistema compatible determinado. Concretamente, consideramos el sistema $Ax = b$, del cual ya conocemos que $r = r(A) = r(A|b)$ (por ejemplo, usando el teorema 4.12 o su corolario). La correspondiente submatriz M de A de rango r la colocamos en las primeras r filas y r columnas (después de renombrar incógnitas si es necesario). Descartamos las últimas $m-r$ ecuaciones, pasamos las últimas $n-r$ columnas (incógnitas) al término independiente y llamamos $x_i = \lambda_i$ para $r+1 \leq i \leq n$. Si sólo nos fijamos en $x_1, \ldots, x_r$ como incógnitas, tenemos un sistema compatible determinado. En esta situación tenemos:

Teorema 5.8 (Cramer) *Sea $Ax = b$ un sistema compatible determinado donde $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces la solución es*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|} \tag{7}$$

Demostración. Ya que A tiene rango n es regular por el teorema 3.16 y por tanto tiene inversa. Entonces $x = A^{-1}b$. Por la expresión de la matriz inversa en términos de la matriz adjunta dada en (4), tenemos

$$x = \frac{1}{|A|}(A^*)^t b.$$

Pero es muy fácil darse cuenta que esta fórmula es justamente (7). □