

1. Un objeto de masa $m = 500 \text{ g}$, está situado en lo alto de un plano inclinado 20° , de longitud 4 m y coeficiente $\mu = 0,2$.

- a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
b) ¿Con qué energía llegará al final del plano?

a) En este caso la fuerza de rozamiento se calcula:

Eje Oy: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$ no se mueve en esta dirección

$$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y$$

$$F_r = \mu N = \mu P_y = \mu mg \cos \alpha = 0,2 \cdot 0,5 \cdot 9,8 \cdot \cos 20$$

$$F_r = 0,92$$

$$W = F_r \cdot s \cdot \cos 180^\circ = 0,92 \cdot 4 \cdot (-1) = -3,68 \text{ J}$$

b)

$$W = \Delta E = E_p(B) + E_c(B) - (E_p(A) + E_c(A))$$

$$E_p(B) = 0 \text{ porque } h_b = 0$$

$$E_c(A) = 0 \text{ porque } v_A = 0$$

$$W = E_f - E_0 \Rightarrow E_f = W + E_0 = -3,68 + m g h_A$$

$$E_f = -3,68 + 0,5 \cdot 9,8 \cdot 4 \cdot \sin 20 = -3,68 + 6,66$$

$$E_f = 2,98 \text{ J}$$

2. Un automóvil acelera de 0 a 100 km/h en 5 s.

- a) Calcula el trabajo realizado por el motor.
b) Calcula la potencia del motor si el rendimiento es del 100%.
c) Calcula la potencia del motor si el rendimiento es del 70%.

$$m_{\text{auto}} = 800 \text{ kg}$$

$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Suponemos que el automóvil se mueve en horizontal.

$$W_{\text{MOT}} = E_f - E_0 = E_{\text{pf}} + E_{\text{cf}} - (E_{\text{p0}} + E_{\text{c0}})$$

$$E_{\text{pf}} = E_{\text{p0}} \text{ ya que } h_f = h_a$$

$$E_{\text{v0}} = 0 \text{ ya que } v_0 = 0$$

$$W_{\text{MOT}} = E_{\text{cf}} = \frac{1}{2} m v^2 = 0,5 \cdot 800 \cdot 27,78^2$$

$$W_{\text{MOT}} = 3,087 \cdot 10^5 \text{ J}$$

b)

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3,087 \cdot 10^5}{5} = 6,17 \cdot 10^4 \text{ W}$$

c) Cuando el rendimiento es del 70%:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{motor}}} \cdot 100\% \Rightarrow P_{\text{mot}} \frac{P_{\text{útil}}}{\eta} \cdot 100\%$$

$$P_{\text{mot}} = \frac{6,17 \cdot 10^4}{70} \cdot 100 = 8,82 \cdot 10^4 \text{ W}$$

3. Tenemos un péndulo de 60 cm de longitud, y lo separamos 60° respecto de la vertical.

- ¿Qué energía cinética tiene en dicho punto?
- ¿Qué velocidad tendrá en el punto más bajo de la trayectoria?
- ¿En qué punto tendrá la mitad de la velocidad que en el punto anterior?

$$L \cdot \cos \alpha = 0,6 \cdot \cos 60 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$$

$$L - L \cos \alpha = 0,6 - 0,3 = 0,3$$

a) Cuando separamos el péndulo 60° de la vertical, la bola está parada, con lo que su velocidad es 0 y su E_c también es 0.

b) En un péndulo se conserva la energía, ya que $W = 0$, y este es 0 porque:

$$\vec{T} = \vec{s} = T - s \cdot \cos 90 = 0$$

Como $W = 0$, entonces

$$E_{\text{TOT}} = 0 \Rightarrow E_f = E_0$$

$$E_0 = E_{c0} + E_{p0}$$

$$E_f = E_{cf} + E_{pf}$$

$$E_{cf} + E_{pf} = E_{p0}$$

$$E_{cf} = E_{p0} - E_{pf}$$

$$\frac{1}{2} m v_s^2 = m g h_0 - m g h_f = m g (h_0 - h_f)$$

$$h_0 - h_f = L - L \cos \alpha = 0,3$$

$$v_f = \sqrt{2 g L (1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,6 \cdot (1 - 0,5)}$$

$$v_f = \sqrt{5,88} = 2,425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

Volvemos a tener $W = 0$, y por lo tanto $\Delta E = 0$

$$E_B = E_A$$

$$E_B = E_{cB} + E_{pB}$$

$$E_{0A} = E_{cA} + E_{pA}$$

$$v_B = \frac{1}{2} v_A = \frac{2,425}{2} = 1,213 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{cB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{cA}$$

$$E_{pB} - E_{pA} = E_{cA} - E_{cB}$$

$$mgh_B - mgh_A = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$2g(h_B - h_A) = v_a^2 - v_B^2 = v_a^2 - \left(\frac{v_a}{2}\right)^2 = v_a^2 - \frac{v_a^2}{4} = \frac{3v_a^2}{4}$$

$$\Delta h = \frac{3v_a^2}{8g} = \frac{3 \cdot 2,425^2}{8 \cdot 9,8} = 0,225$$

$$\cos \alpha = \frac{0,6 - 0,225}{0,6} = \frac{0,375}{0,6} = 0,625$$

$$\alpha = 51,32^\circ$$

4. Calcula la velocidad a la que hay que lanzar, desde la superficie de la Tierra, un satélite de masa 200 Kg, para situarlo en una órbita geoestacionaria.

Los satélites geoestacionarios están a una altura de unos $35,8 \cdot 10^3$ km aproximadamente. El camino para calcular este dato se desarrolló en el tema anterior: $F_G = F_C$.

En nuestro problema supondremos que la atmósfera no supone rozamiento, con lo que $\Delta E = 0$.

De esta forma:

$$E_0 = E_f$$

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

En A:

$$E_{cA} = \frac{1}{2} m_s v_a^2 \quad v_a \text{ es lo que queremos averiguar}$$

$$E_{pA} = \frac{GM_T m_s}{R_T}$$

En B:

$$E_{cB} = \frac{1}{2} m_s v_B^2$$

$$E_{pB} = -\frac{GM_T m_s}{R_T + h}$$

En este punto B el satélite es geoestacionario, por lo que:

$$v_B = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

$$T = 1 \text{ día} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 86400 \text{ s}$$

$$v_B = \frac{2\pi \cdot 42178000}{86400} = 3,067 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{1}{2} m_s v_a^2 - \frac{GM_T m_s}{R_T} = \frac{1}{2} m_s v_B^2 - \frac{GM_T m_s}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2} v_a^2 = \frac{1}{2} v_B^2 + GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

$$v_a^2 = v_B^2 + 2GM_T \frac{h}{R_T(R_T + h)} =$$

$$v_a^2 = v_B^2 + \frac{2g_0 R_T^2 h}{R_T(R_T + h)}$$

$$v_a^2 = v_B^2 + \frac{2g R_T h}{R_T + h}$$

$$v_a^2 = (3,067 \cdot 10^3)^2 + \frac{2 \cdot 9,8 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \cdot 35,8 \cdot 10^6}{42,178 \cdot 10^6}$$

$$v_a^2 = 9,407 \cdot 10^6 + 106,11 \cdot 10^6$$

$$v_a = \sqrt{115,51 \cdot 10^6} = 10,75 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Comprimos 10 cm un muelle situado verticalmente y colocamos una bola de 100 g encima.

a) ¿A qué altura llegará la bola?

b) Si a los 3 m de altura esta bola se incrusta en otra bola de 200 g que estaba en reposo, ¿a qué altura llegarán?

Dato: $K = 1300 \text{ N m}^{-1}$.

Como la fuerza elástica del muelle es una fuerza conservativa, igual que la fuerza gravitatoria, $W = 0$, ya que no hay más que fuerzas externas.

a) Por lo tanto:

$$E_A = E_B$$

$$E_{pe\Delta} + E_{pgA} + E_{cA} = E_{peB} + E_{pgB} + E_{cB}$$

$$h_A = 0 \quad v_A = 0 \quad \text{muelle relajado}$$

$$E_{pe\Delta} = E_{pgB}$$

$$\frac{1}{2} K(\Delta x)^2 = mgh_B$$

$$h_B = \frac{K(\Delta x)^2}{2mg} = \frac{1300 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8} = \frac{130}{19,6} = 13,265 \text{ m}$$

b) Volvemos a aplicar el principio de conservación de la energía para calcular la v_B cuando se encuentra con la otra bola.

$$E_A = E_B \Rightarrow E_{peA} = E_{pgB} + E_{cB}$$

$$E_{cB} = E_{peA} - E_{pgB}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} K(\Delta x)^2 - m g h_B$$

$$v_B^2 = \frac{K(\Delta x)^2}{m} - 2 g h_B = \frac{1300 - 0,1^2}{0,1} - 2 \cdot 9,8 \cdot 3$$

$$v_B^2 = 130 - 58,8 = 71,2$$

$$v_B = \sqrt{71,2} = 8,438 \frac{m}{s}$$

Cuando se encuentran las bolas se conserva el momento lineal, ya que en ese momento

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$p_0 = p_f \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3$$

bola 1 bola 2 está quieta bolas juntas

$$v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,1 \cdot 8,438}{0,3} = 2,813 \frac{m}{s}$$

Cuando se juntan, las bolas salen con una velocidad de 2,813 m/s, y a partir de ahí volvemos a aplicar el principio de conservación de la energía.

Como $m_3 = m_1 + m_2$

$$E_B = E_C$$

$$E_{cB} + E_{pB} = E_{cC} + E_{pC}$$

$$\frac{1}{2} m_3 v_B^2 + m_3 g h_B = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + m_3 g h_C$$

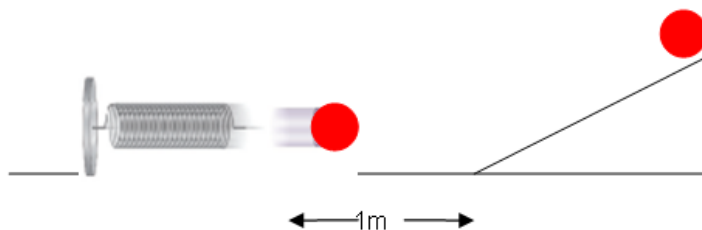
$$\frac{1}{2} v_B^2 + g h_B = g h_C$$

$$h_C = h_B + \frac{v_B^2}{2g} = 3 + \frac{2,813^2}{2 \cdot 9,8} = 3 + 0,404 = 3,404 \text{ m}$$

6. Calcula la altura a la que llegará una bola de masa 100 g si comprimimos el muelle de la figura 10 cm, cuando:

a) $\mu = 0$.

b) $\mu = 0,4$.



a) Si $\mu = 0$, entonces $F_r = 0$, con lo que no hay fuerzas conservativas, por lo tanto $W = 0$, con lo que se conserva la energía.

$$E_A = E_C = E_B$$

$$E_{p,e,\Delta} + E_{pgA} + E_{cA} = E_{pgB} + E_{cB}$$

pto. más bajo parado parado

$$\frac{1}{2}K(\Delta x)^2 = mgh_b \Rightarrow h_b = \frac{K(\Delta x)^2}{2mg} = \frac{1500 - 0,1^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8} = 7,65 \text{ m}$$

b) Si $\mu = 0,4$, entonces $F_r \neq 0$, por lo tanto, no se conserva la energía. Al cambiar la inclinación del plano, la F_r cambiará su valor, por lo tanto, calcularemos la E_c (final del primer tramo) antes de calcular la altura B.

Tramo horizontal

$$F_r = \mu N = \mu mg$$

$$N = P = mg$$

$$W_{F_r} = -F_r \cdot s = -\mu mg \cdot s = -0,4 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 1 = -0,3925$$

$$W_{F_r} = \Delta E = E_c - E_A \Rightarrow E_c = W_{F_r} + E_A = 0,392 + \frac{1}{2}1500 \cdot 0,1^2$$

$$E_c = -0,392 + 7,5 = 7,108 \text{ J}$$

Tramo inclinado

$$N = P_y \Rightarrow F_r = \mu N = \mu mg \cos 30^\circ$$

$$W_{F_r} = -\mu mg \cos 30^\circ \cdot s$$

$$s = \frac{h_b}{\sin 30} \Rightarrow W_{F_r} = -\mu mg \cos 30^\circ \frac{h_b}{\sin 30}$$

$$W_{F_r} = \frac{-0,4 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot h_b}{0,5773} = -0,679 h_b$$

$$W_{F_r} = \Delta E = E_B - E_c$$

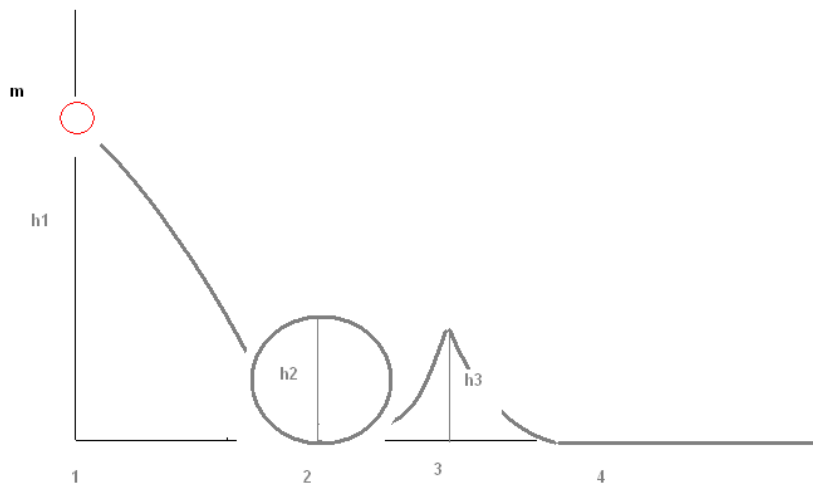
$$E_B = W_{F_r} + E_c = -0,679 h_b + 7,108$$

$$1,659 h_b = 7,108$$

$$h_b = \frac{7,108}{1,659} = 4,285 \text{ m}$$

7. Por la montaña rusa de la figura se desliza un vagón de 500 kg sin rozamiento. Calcula:

- La energía inicial.
- La velocidad en lo alto del *looping* (punto 2).
- La velocidad en el punto 3.
- El rozamiento necesario en el punto 4 (final) para detener el vagón en 50 m.



a) En el punto inicial 1:

$$E_1 = E_{p1} + E_{c1}$$

parado

$$E_1 = mgh_1 = 500 \cdot 9,8 \cdot 50 = 2,45 \cdot 10^5 \text{ J}$$

b) A lo largo de todo el recorrido, al no haber rozamiento, se conservará la energía, por lo que:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = g(h_1 - h_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (50 - 20)}$$

$$v_2 = 24,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Por la misma razón:

$$E_1 = E_3 \Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh_3$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 = gh_1 - gh_3$$

$$v_3 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (50 - 15)}$$

$$v_3 = 26,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Si queremos detener el vagón en 50 m, el rozamiento será el que tenga que realizar el trabajo necesario para gastar la energía que tiene el vagón, que, como a lo largo del recorrido no hay rozamiento, será la misma que al comienzo, como ya hemos visto. Así:

$$W = \Delta E \Rightarrow W_{F_r} = E_f - E_0$$

$$F_r \cdot s \cos \alpha = E_{pf} + E_{cf} - E_{p0} - E_{c0}$$

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{son iguales } v_f = 0 \quad \text{son iguales}$$

$$h_f = h_0 \quad \text{parado} \quad h_f = h_0$$

Como hemos visto antes, a lo largo del recorrido:

$$E_{T1} = E_{T2} = E_{T3} = E_{T4} \Rightarrow E_{T1} = E_{T4} \Rightarrow E_{p1} = E_{c4}$$

$$E_{p1} = mg h_1 = 2,45 \cdot 10^5 \text{ J (cálculo en apartado a)}$$

$$E_{c4} = 2,45 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$F_r \cdot 50 \cdot \cos 180^\circ = -E_{c0} = -2,45 \cdot 10^5$$

$$F_r = \frac{-2,45 \cdot 10^5}{-50} = 4900 \text{ N}$$

Si aplicamos lo aprendido en dinámica:

$$\text{Eje Oy: } N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g$$

$$F_r = \mu N = \mu mg = 4900 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{4900}{mg} = \frac{4900}{500 \cdot 9,8} = 1$$

8. Calcula el trabajo realizado por la cuerda de un péndulo durante una oscilación completa, suponiendo que lo separamos de la vertical un ángulo α .

La cuerda de un péndulo, al no variar su longitud, hace que la esfera realice un movimiento circular, siendo la cuerda, a lo largo de todo el recorrido, el radio de la circunferencia que describe la esfera en su movimiento.

Si vemos dos posiciones consecutivas por las que pasa la esfera, el desplazamiento sufrido por ella es perpendicular al radio de la circunferencia, es decir, a la fuerza que ejerce la cuerda, llamada *tensión*. El desplazamiento es tangente a la circunferencia y perpendicular al radio.

Por lo tanto:

$$W_T = T \cdot \Delta s \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Y como a lo largo del recorrido \vec{T} y $\Delta \vec{s}$ son siempre perpendiculares, W_T será siempre 0, con lo que la esfera conservará su energía a lo largo de todo el recorrido, conservando la altura a la que llega al completar cada oscilación.

9. Demuestra que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa.

Cuando una partícula (o un cuerpo) se mueve a lo largo de una trayectoria cualquiera, lo hace cambiando entre posiciones consecutivas, entre las cuales su Δ_s (variación de posición o espacio recorrido) es prácticamente 0.

En general, entre dos posiciones consecutivas, la fuerza de gravedad es una fuerza central, es decir, apunta siempre al mismo punto del espacio.

Cuando la partícula se desplaza del punto 1 al punto 2, que son consecutivos, el Δ_s es muy pequeño (casi 0) y el triángulo rayado es un triángulo equilátero, por lo que:

$$r_0 = r_s + \Delta_r \quad \text{y} \quad \Delta_r = \Delta_s \cos \alpha \Rightarrow r_0 - r_f = \Delta_s \cos \alpha$$

Así, el trabajo para mover el cuerpo entre dos posiciones consecutivas es:

$$W = \vec{F}_G \cdot \vec{\Delta}_s$$

$$\vec{F}_G = -\frac{GM_T m_c}{r^2} \vec{u}_r ; \vec{u}_r \text{ es el vector unitario en la dirección del radio}$$

$$W = -\frac{GM_T m_c}{r^2} |\vec{u}_r| |\vec{\Delta}_s| = -\frac{GM_T m_c}{r^2} \cdot 1 \cdot |\vec{\Delta}_s| \cdot \cos \alpha$$

Con α = ángulo formado por el radio y Δ_s que coincide con el del dibujo, y por lo tanto:

$$W = -\frac{GM_T m_0 (r_0 - r_f)}{r^2}$$

Con lo que cualquier cambio de posición del cuerpo en el espacio implica un trabajo de la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo que únicamente depende de la distancia a la Tierra y de la variación de esta distancia, por lo que, vayamos por la trayectoria que vayamos, estas variaciones de distancia a la Tierra unas veces sumarán y otras restarán, pero al final contará la variación total producida en la distancia a la Tierra.

Dicho de otra forma, da igual el camino que recorra el cuerpo, el trabajo de la fuerza gravitatoria sólo depende de la distancia a la Tierra a la que comienza y la distancia a la que termina, y esta es la definición de fuerza conservativa.

10. Un satélite artificial de 100 Kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s². Calcula:

- El radio de la órbita.
- La energía potencial del satélite.
- La energía mecánica del satélite.
- La energía que habría que suministrar a este satélite para que cambiara su órbita a otra con de doble de radio.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} ; M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; R_T = 6370 \text{ Km}$$

a) Para que este satélite se mueva en una órbita circular, la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el satélite debe ser igual a la fuerza centrífuga.

Así:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_c$$

$$G \frac{M_T \cdot m_s}{d^2} = m_s \frac{v_s^2}{d}$$

$\Rightarrow d$ = radio de la órbita o distancia entre los centros de la Tierra y el satélite

$$d = \frac{GM_T}{v_s^2}$$

$$d = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(7,5 \cdot 10^3)^2} = 7,091 \cdot 10^6 \text{ m} = 7091 \text{ km}$$

Altura sobre la Tierra

$$d = R_T + h \Rightarrow h = d - R_T = 7091 - 6370 = 721 \text{ Km}$$

$$b) E_p = -G \frac{M_T m_s}{d} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 10^2}{7,091 \cdot 10^6} = -5,625 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c)

$$E_M = E_p + E_c$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (7,5 \cdot 10^3)^2 = 2,813 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_M = -5,625 \cdot 10^9 + 2,813 \cdot 10^9$$

$$E_M = -2,813 \cdot 10^9 \text{ J}$$

d) Como

$$F_G = F_C$$

$$\Rightarrow \frac{GM_T m_s}{d^2} = m_s \frac{v_s^2}{d} \Rightarrow v_s^2 = \frac{GM_T}{d}$$

Por lo que su E_M la podemos expresar como:

$$\begin{aligned} E_{M,s} &= E_{p,s} + E_{c,s} = -G \frac{M_T \cdot m_s}{d} + \frac{1}{2} m_s v_s^2 = \\ &= -G \frac{M_T \cdot m_s}{d} + \frac{1}{2} m_s \frac{GM_T}{d} = \frac{GM_T \cdot m_s}{d} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{GM_T \cdot m_s}{d} \end{aligned}$$

Luego tenemos el satélite en un radio inicial r_0 con:

$$E_{M_0} = -\frac{GM_T \cdot m_s}{2r_0}$$

Y queremos colocarlo en una órbita con $r_f = 2r_0$, por lo que:

$$E_{M_f} = -\frac{GM_T \cdot m_s}{2r_f} = -\frac{GM_T \cdot m_s}{2 \cdot 2r_0} = \frac{1}{2} E_{M_0}$$

Por lo que tendremos que comunicarle una energía:

$$\Delta E = E_{M_f} - E_{M_0} = \frac{1}{2} E_{M_0} - E_{M_0} = -\frac{1}{2} E_{M_0} = +\frac{1}{2} (+2,813 \cdot 10^9)$$

$$\Delta E = 1,41 \cdot 10^9 \text{ J}$$