Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$. **(2,5 puntos)**

3A. a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$. **(1 punto)**

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

A1.- Solución

a) Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que **f(c) = 0**

b) Observamos que f(-1)=-3-10-10+3=-20; f(0)=3; g(-1)=e^{-1}; g(0)=e^{0}=1, esto significa que en los extremos del intervalo [-1,0] ocurre que f(-1)<g(-1) y f(0)>g(0), como además las funciones son continuas, deducimos que sus gráficas deben, cruzarse en algún sitio del interior del intervalo .
De otro modo, si consideramos la función diferencia h(x)=f(x)-g(x), tenemos que h(-1)<0 y h(0)>0 o sea que **[sign h(-1) ≠ sign h(0)]**, además h(x) es continua por ser diferencia de continuas, luego por el Teorema de Bolzano podemos asegurar que existe un punto $c\in(-1,0)$ tal que h(c)=0 o lo que es igual f(c)=g(c)

c) Para encontrar los puntos de inflexión de f, primero encontraremos los puntos en donde se anula la derivada segunda f’’(x)=0 y luego veremos si en ellos la siguiente derivada que no se anula es de orden impar:

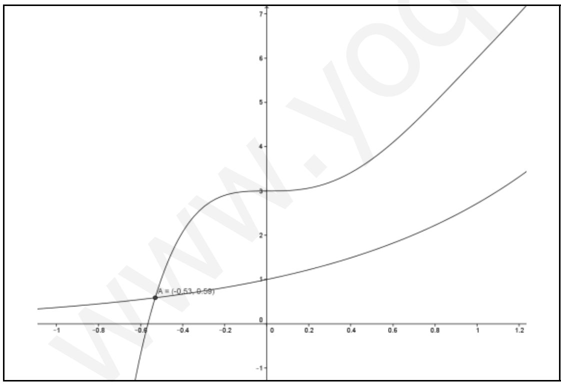
$$f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3\Rightarrow f'(x)=15x^4-40x^3+30x^2\Rightarrow f''(x)=60x^3-120x^2+60x$$

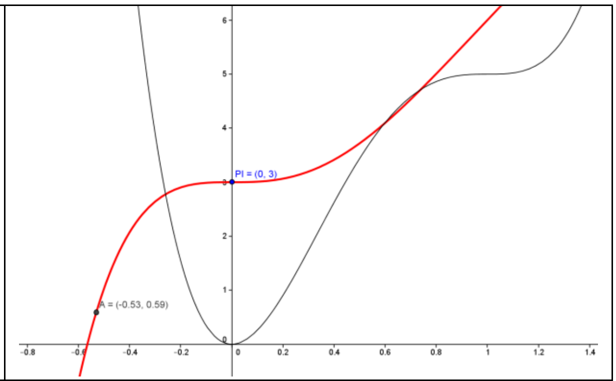
$$f''(x)=0\Rightarrow 60x(x^2-2x+1)=0\Rightarrow 60x(x-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

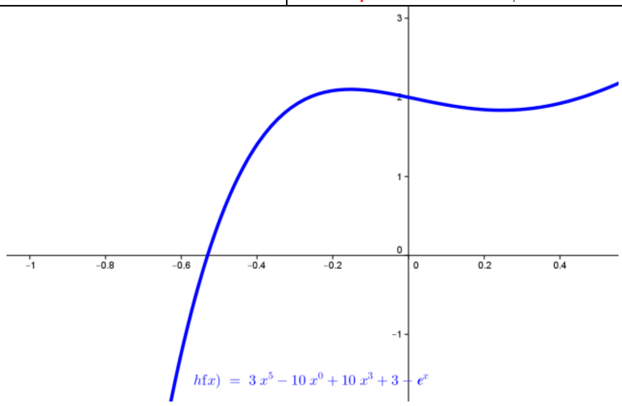
$$f'''(x)=180x^2-240x+60\Rightarrow\begin{cases}f'''(0)=60\neq 0\Rightarrow PI(0,f(0))=(0,3)\\f'''(1)=180-240+60=0\end{cases}$$

$$f^{IV}(x)=360x-240\Rightarrow f^{IV}(1)=360-240=120\neq 0\Rightarrow \text{no hay punto de inflexión para } x=1$$

$$\text{Luego sólo hay un punto de inflexión en } (0,3)$$







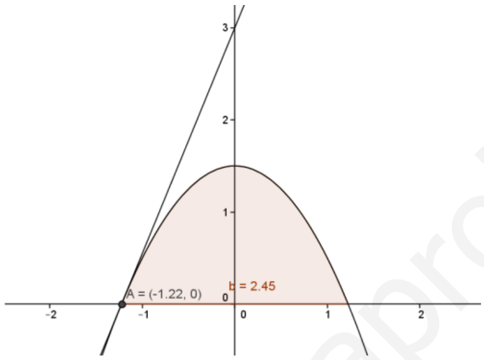
A2.- Solución

La parábola dada tiene por eje al eje Y, y el vértice se encuentra sobre é, además los puntos de corte con el eje X son (-a,0) y (a,0) luego el área pedida:

$$\int_{-a}^{a}(-x^2+a^2)dx = 2\int_{0}^{a}(-x^2+a^2)dx = 2[-\frac{x^3}{3}+a^2x]_0^a = 2(-\frac{a^3}{3}+a^3) = 2\frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(-a) = -2(-a) = 2a$$

$$\text{luego queremos que } \frac{4a^3}{3} = 2a \Rightarrow 4a^3 = 6a \Rightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = +\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ pues nos dicen que } a > 0$$



A3.- Solución

$$\begin{cases} A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A-B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix} \\ 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |M| = 7 \\ |M^2| = |M|^2 \\ |2M| = 4|M| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |M^2| = 49 \\ |2M| = 28 \end{cases}$$

A4.- Solución

Si el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano tiene solución única entonces la recta y el plano se cortan en un punto que es la solución de ese sistema. Si el sistema es incompatible la recta y el plano son paralelos, y si el sistema es compatible determinado la recta está contenida en el plano

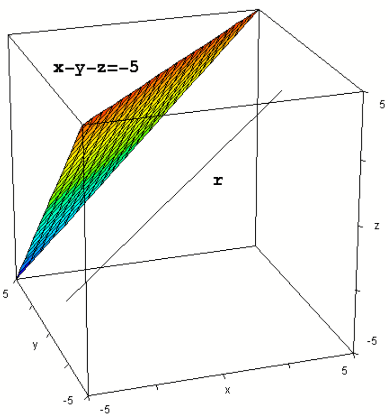
$$\begin{cases} x-y-z=a \\ 2x+y+az=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -a+4+1+2a = 5+a \Rightarrow \begin{cases} \text{Si a = -5} \\ \text{rango matriz coeficientes 2} \\ \text{porque} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \Rightarrow \\ \text{rango de la ampliada 3} \end{cases}$$

Luego cuando *a*=-5 el sistema es incompatible y la recta y el plano son paralelos

Cuando *a* distinto de -5 los rangos son 3 y el sistema es compatible determinado, la recta y el plano se cortan en el punto $\left(\frac{20a+2a^2}{5+a}, \frac{10a+a^2}{5+a}, \frac{5a}{5+a}\right)$. No hay más posibilidades.

b) Cuando la recta corta al plano la distancia entre ambos es 0, cuando es paralela es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Observamos que el punto P(0,0,0) pertenece a la recta porque viene dada por dos planos que pasan por el origen de coordenadas. Como en este caso π es x-y-z=-5

$$d(\pi, r) = d(\pi, P \in r) = \frac{|0-0-0+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x+1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. **(1 punto)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\,\mathrm{sen}x\,\cos x}{1+\mathrm{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$$

(1,25 puntos por integral)

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(2 puntos)**

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales). **(0,5 puntos)**

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

(1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s. **(1,25 puntos)**

B1.- Solución

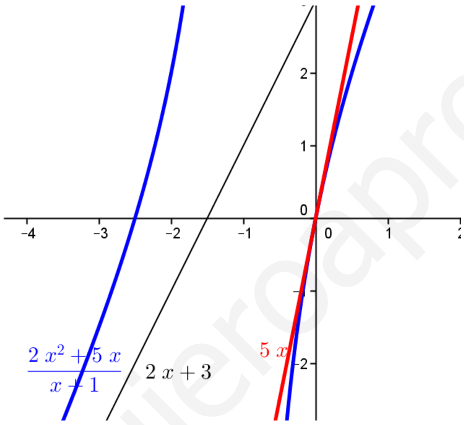
Sabemos que la pendiente y la ordenada en el origen de la asíntota oblicua son los siguientes límites

$$\begin{cases} 2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx}{x^2+x} = a \Rightarrow a = 2 \\ 3 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+bx}{x+1} - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(-2+b)x}{x+1} = -2+b \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

Luego la función es:

$$f(x) = \frac{2x^2+5x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x+5)(x+1)-2x^2-5x}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+5}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = 5$$

Como la tangente viene dada por $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 5(x-0) \Rightarrow y = 5x$



B2.- Solución

La primera se trata de una integral inmediata de la forma $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = L(f(x)+K$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \Rightarrow \int \frac{2sen(x)\cos(x)}{1+sen^2(x)}dx = L(1+sen^2(x))+K$$

La segunda es una integral racional que calculamos por el método habitual

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx = \int \frac{x^2+x-4}{x(x^2-4)}dx = \int \frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}dx \\ \begin{cases} x^2+x-4 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \\ x = 0 \Rightarrow -4 = -4A \Rightarrow A = 1 \\ x = 2 \Rightarrow 2 = 8B \Rightarrow B = 1/4 \\ x = -2 \Rightarrow -2 = 8C \Rightarrow C = -1/4 \end{cases} \\ I = Lx + \dfrac{1}{4}L(x-2) - \dfrac{1}{4}L(x+2) + K = Lx\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x+2}} + K \end{cases}$$

B3.- Solución

Emplearemos tres propiedades 1ª, si multiplicamos una fila por un nº el determinante queda multiplicado por ese nº, 2ª si añadimos a una fila o columna una combinación lineal de las restantes el determinante no varía y 3ª si cambiamos entre sí dos filas o columnas el determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 \text{ Hemos aplicado } 3^a, 3^a, 2^a \text{ y } 1^a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Sumamos a la primerafila la segunda fila multiplicada por 2 y la tercera} \\ \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = 2 \Rightarrow \begin{cases} b-a \neq 0 \Rightarrow b \neq a \\ c-a \neq 0 \Rightarrow c \neq a \\ c-b \neq 0 \Rightarrow c \neq b \end{cases}$$

He aplicado las propiedades 2ª y 1ª y he desarrollado el determinante por la primera fila.

B4.- Solución

Primero escribiremos las ecuaciones de las rectas en forma paramétrica

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0,1,0) \in r \\ \vec{v}=(1,0,1) \text{ director de r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mu \\ y=6 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0,6,0) \in s \\ \vec{u}=(1,0,1) \text{ director de s} \end{cases}$$

Luego las rectas son paralelas porque tienen el mismo vector director y el punto P de r no pertenece a s. Para calcular la distancia consideramos un punto genérico S de s y el vector PS, así determinamos μ para que este vector sea perpendicular al vector director de r

$$\begin{cases} \overrightarrow{PS} = (\mu - 0, 6 - 1, \mu - 0) = (\mu, 5, \mu) \\ \overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\mu, 5, \mu) \cdot (1,0,1) = 0 \Rightarrow \mu + 0 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PS} = (0,5,0) \\ D(r,s) = \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{5^2} = 5 \end{cases}$$