PREGUNTA 1.-
a) Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 8 \\ x + y \geq 5 \\ x - 5y \leq 0 \end{array}\right\rangle$$

b) Halla las soluciones de la siguiente inecuación y represéntalas en la recta real:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1} < 0$$

PREGUNTA 2.- Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla:

Años	2005	2006	2007
Gasto en publicidad (x 1000€)	1	3	5
Ingresos (x 1000€)	4	26	64

a) ¿Qué tipo de interpolación es más conveniente para reflejar las variaciones en los gastos y los ingresos?
b) Calcula mediante interpolación qué ingresos se esperan con unos gastos en publicidad de 9000€.
c) Si se quieren obtener unos ingresos de 100000€, ¿qué gasto en publicidad hay que realizar?

PREGUNTA 3.- Sea la función:

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{lll} -2x - 3 & \text{si} & x < -2 \\ -x^2 + 5 & \text{si} & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

a) Calcula el dominio de f(x)
b) Calcula f(-4), f(-2), f(0), f(2) y f(3)

PREGUNTA 4.- Halla las asíntotas de la función: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

PREGUNTA 5.- Calcula los números a y b para que sea continua en toda la recta real la función:

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{lll} ax & \text{si} & x \leq 2 \\ bx + 1 & \text{si} & 2 < x \leq 4 \\ x - a & \text{si} & x > 4 \end{array}\right.$$

PREGUNTA 6.- Aplicando la definición de derivada, obtén la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

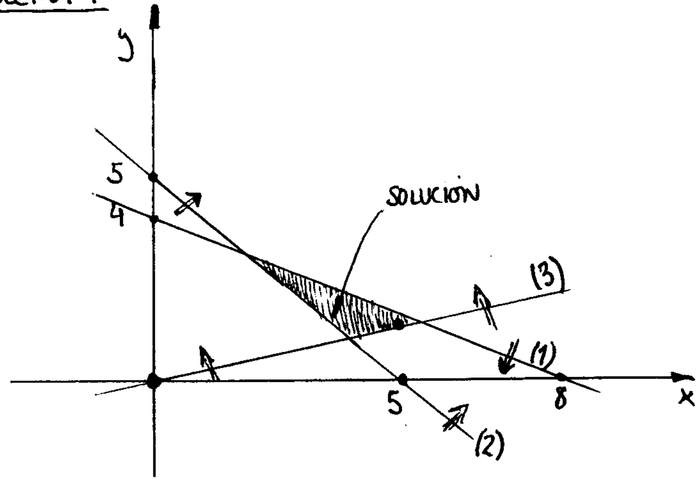
Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	a) 1 punto b) 1,5 puntos
2	1,5 puntos
3	1 punto (0,5 puntos por apartado)
4	2 puntos
5	1,5 puntos
6	1,5 puntos

Sólo se valorarán aquellas respuestas que estén debidamente justificadas.

PROBLEMA 1

a)



(1) $x+2y=8$

x	y
0	4
8	0

$O(0,0): \quad 0+2\cdot 0=0\leq 8$ ✓

(2) $x+y=5$

x	y
0	5
5	0

$O(0,0): \quad 0+0=0\geq 5$ NO

(3) $x-5y=0$

x	y
0	0
5	1

$P(3,3): \quad 3-5\cdot 3=-12\leq 0$ ✓

b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)}<0$

	$-\infty$ a -1	-1 a $+1$	$+1$ a $+\infty$
$(x+2)^2$	+	+	+
$(x+1)$	−	+	+
$(x-1)$	−	−	+
$(x+1)(x-1)$	+	−	+
$\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)}$	+	−	+

$\boxed{x\in(-1,+1)}$ +1   −1

Si $x=\pm 1 \quad \nexists \ \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)}$

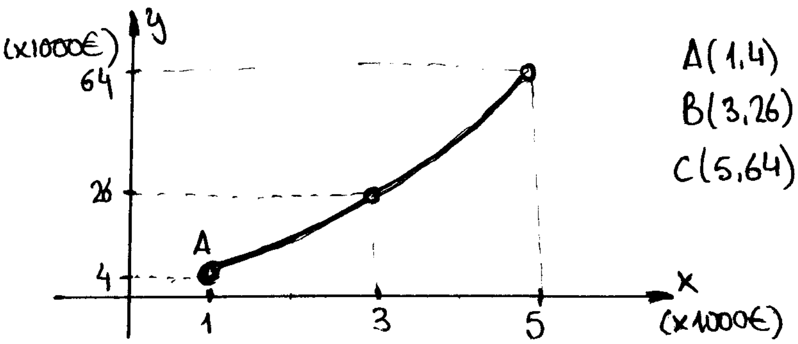
PROBLEMA 2

a) Los gastos crecen a razón de 2000€ al año de forma constante $\Rightarrow$ INTERPOLACIÓN LINEAL.

Los ingresos crecen 22000€ de 2005 a 2006 y 38000€ de 2006 a 2007 por lo tanto no es lineal $\Rightarrow$ INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

b) Ingresos vs Gastos

Sean $\left.\begin{array}{l}\text{Gastos} \equiv x\\ \text{Ingresos}\equiv y\end{array}\right\}$



A(1,4)
B(3,26)
C(5,64)

Parábola: $y=ax^2+bx+c$

$$\left.\begin{array}{l} A(1,4)\Rightarrow 4=a+b+c\\ B(3,26)\Rightarrow 26=9a+3b+c\\ C(5,64)\Rightarrow 64=25a+5b+c\end{array}\right\} \ (\ldots) \quad \begin{array}{l}a=2\\ b=3\\ c=-1\end{array}$$

$$\boxed{y=2x^2+3x-1}$$

Por lo tanto, si $x=9$ (9000€)

$y=2\cdot 81+3\cdot 9-1=188$

$\boxed{188000\text{ €}}$

c) Si $y = 100 \Rightarrow 100 = 2x^2 + 3x - 1$;

$$2x^2 + 3x - 101 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -101 \end{array}\right\} \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-101)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{817}}{4} = \begin{cases} 6{,}4 \\ \cancel{-7{,}9} \end{cases}$$

NO TIENE SENTIDO

$x = 6{,}4 \Rightarrow \boxed{6400€}$

PROBLEMA 3

a) $$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } x < -2 \longrightarrow \text{Es una recta} \Rightarrow \text{Dominio } \mathbb{R} \\ -x^2+5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \longrightarrow \text{Parabola} \Longrightarrow \text{" " } \mathbb{R} \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \longrightarrow \text{Recta} \Longrightarrow \text{" " " } \mathbb{R} \end{cases}$$

El dominio de f : $D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(-4) = -2(-4) - 3 = +8 - 3 = +5$

$f(-2) = -(-2)^2 + 5 = -4 + 5 = +1$

$f(0) = -0^2 + 5 = +5$

$f(2) = -2^2 + 5 = -4 + 5 = +1$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = +2$

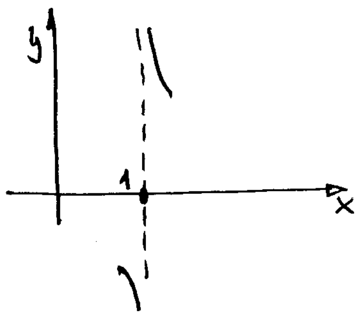
PROBLEMA 4 : $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

- Asíntotas horizontales : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ NO

- Asíntotas verticales : $\lim_{x \to 1} \left(x + 1 + \dfrac{2}{x-1} \right) = 1 + 1 + \dfrac{2}{\to 0} = \infty$

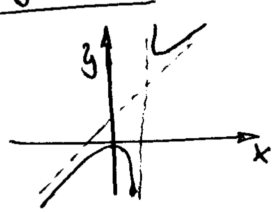
L. laterales $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 1 + \dfrac{2}{\to 0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + 1 + \dfrac{2}{\to 0^+} = +\infty$



- As. oblicuas: $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2 - x} \right) = 1 + 0 + 0 = 1 \\ n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \infty} \left(\cancel{x} + 1 + \dfrac{2}{x-1} - \cancel{x} \right) = 1 + 0 = 1 \end{array}\right\} \boxed{y = x + 1}$$



PROBLEMA 5

$$f(x)=\begin{cases} ax & \text{si } x\leq 2 \\ bx+1 & \text{si } 2<x\leq 4 \\ x-a & \text{si } x>4 \end{cases}$$

Condición de continuidad en $x=2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = a\cdot 2 = 2a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = b\cdot 2+1 = 2b+1 \\ f(2)=2a \end{array}\right\} \quad 2a=2b+1$$

Idem en $x=4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = 4b+1 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = 4-a \\ f(4)=4x+1 \end{array}\right\} \quad 4b+1=4-a$$

sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a-2b=1 \\ a+4b=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a-2b=1 \\ -2a-8b=-6 \end{array}\right\}$$

$$-10b=-5 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a-1=1 \Rightarrow a=1$$

PROBLEMA 6

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$