Resumen de límites

Definición de límite de f(x) en x=a	$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$	Una función tiene límite en un punto si existen los limites laterales y son iguales
Limite infinito (Asíntotas verticales)	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ **o** $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ **o** $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$
Calculo de límites en -∞ (Truco para facilitar cálculos)	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$	$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+6x+1}{2x^2-x-9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-6x+1}{2x^2+x-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4(-x)^2-6(-x)+1}{2(-x)^2+(-x)-9} =$
Límite de la función exponencial	$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{a^x}) = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{a^x}) = \lim_{x\to-\infty} a^{-x} = +\infty$
Límite de la función logarítmica	$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$

Propiedades de los limites

Suma y restas	Producto	Cociente	Constante
$\acute{lím}_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \acute{lím}_{x\to a} f(x) \pm \acute{lím}_{x\to a} g(x)$	$\acute{lím}_{x\to a}(f(x).g(x)) = \acute{lím}_{x\to a} f(x).\acute{lím}_{x\to a} g(x)$	$\acute{lím}_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\acute{lím}_{x\to a} f(x)}{\acute{lím}_{x\to a} g(x)}$	$\acute{lím}_{x\to a}(Kf(x)) = K\,\acute{lím}_{x\to a} f(x)$
Operaciones con Infinito Sea **k** un número real cualquiera a) $\infty = +(+\infty) = -(-\infty)$ b) $-\infty = -(+\infty) = +(-\infty)$ c) $k + \infty = \infty$ d) $k - \infty = -\infty$ e) $\infty + \infty = \infty$ f) $-\infty - \infty = -\infty$	g) $Si\ k > 0, \begin{cases} k(\infty) = \infty \\ k(-\infty) = -\infty \end{cases}$ h) $Si\ k < 0, \begin{cases} k(\infty) = -\infty \\ k(-\infty) = \infty \end{cases}$ i) $\infty(\infty) = (-\infty)(-\infty) = \infty$ j) $(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = \infty = -\infty$	k) $\frac{k}{0} = \infty$ l) $\frac{k}{\infty} = 0$ m) $\frac{\infty}{k} = \infty$ n) $\frac{0}{\infty} = 0$ o) $\frac{\infty}{0} = \infty$	p) $0^\infty = 0$ q) $\infty^\infty = \infty$ r) $0^k = \begin{cases} 0 & si\ k > 0 \\ \infty & si\ k < 0 \end{cases}$ s) $k^\infty = \begin{cases} \infty & si\ k > 1 \\ 0 & si\ 0 < k < 1 \end{cases}$
Potencia	**Raíz**	**Composición**	**Función elevada a función**
$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n = L^n$	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$	$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a}(g(x)))$	$\acute{lím}_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \acute{lím}_{x\to a} f(x)^{\acute{lím}_{x\to a} g(x)}$

Indeterminaciones	Hay casos en los que no se puede aventurar el resultado de una operación entre límites.	
Son indeterminaciones	$\frac{k}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0\,(\pm\infty)$	1^∞ , $0^0, 0^\infty$ (no las vemos)

Cómo resolvemos algunas indeterminaciones

$\frac{k}{0}$	Racionales (Son asíntotas verticales)	**Estudiamos los límites laterales El resultado es siempre** $\pm\infty$**.** Si coinciden el límite es $\pm\infty$. Si no coinciden diremos que la función no tiene límite. El signo depende de los signos que adopten numerador y denominador	$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2\cdot 3^+ - 5}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2\cdot 3^- - 5}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
$\infty - \infty$	**Polinomios** $\lim_{x\to\infty} P(x)$	$\lim_{x\to\infty} ax^n + bx^{n-1} + ... = \lim_{x\to\infty} ax^n = \pm\infty$	$\lim_{x\to+\infty} (4x^3 - 6x^2 - 2x + 1) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	**Racionales** $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ **(Comparamos grados)**	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & si\ n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & si\ n = m \\ \pm\infty & si\ n > m \end{cases}$	**Ejemplo** $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x^3-4x^2+7} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2-7x+1}{3x^2+2x+4} = -\frac{5}{3}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-3x}{-4x^2+1} = -\infty$
$\frac{\infty}{\infty}$	**Irracionales x->**$\pm\infty$	Dividimos los polinomios por la x de mayor grado	$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-5x}{x}+\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}+\frac{x}{x}}$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}$ **Sol: -5/2**

$\infty - \infty$	**Irracionales x->$\pm\infty$**	Multiplicamos y dividimos por el conjugado para llegar a la indeterminación ∞/∞. Luego dividimos por la x de mayor grado	$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)^2-(3x)^2}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}+\frac{3x}{x}}$ **Sol x=0.**

Los conjugados de expresiones del tipo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-b$, $a-\sqrt{b}$ son, respectivamente, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+b$, $a+\sqrt{b}$.

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a, tal que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *presenta los casos de indeterminación* $\frac{0}{0}, o \frac{\infty}{\infty}$, entonces se verifica $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(a puede ser $\pm\infty$)

$\infty - \infty$	Se efectúa la suma o resta dentro del límite (mínimo común múltiplo), buscando una de estas dos indeterminaciones $\frac{0}{0}, o \frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{L(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-L(1+x)}{x\cdot L(1+x)}$ Pasamos de una indeterminación $(\infty-\infty)$ a $\frac{0}{0}$ **y podemos aplicar LH**
$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0}$ o bien$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to 0} xLnx = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty} =$ (L'H)$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

Ejercicios

1.- **(2010/Junio/B/1**) Calcula lim $_{x\to 0}$ [$(e^x - e^{\text{sen } x}) / (x^2)$] **Sol:0.**

2.- **(2009/Junio/A/1**) Calcula el siguiente límite lim $_{x\to 1}$ [$1/\text{Ln}(x) - 2/(x^2-1)$] **Sol:1**

3.- **(2006/M1/B/1**) Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$ siendo Ln la función logaritmo neperiano. **Sol: 1/ 2.**

4.- Estudia el dominio y el limite en el infinito de esta función, $f(x)=\frac{x(Ln\,x)^2}{(x-1)^2}$

siendo Ln la función logaritmo.**Sol: en+∞ vale 0.**

5.- **(2003/septiembre)** Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-senx}{x\cdot senx}$ **Sol: -1/2**

6.- **(2000/septiembre)** Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{[\text{xsen}(x)]}{\text{tg}(x^2)}$ **Sol:** 1

7.- Siendo Ln(x) el logaritmo neperiano de x, calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\text{Ln}(x)}\right)$ **Sol:1/2**

8.- Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\text{sen}x}{x^3-x^2}$ **Sol:-1**

9.- Calcula (a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (b) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-3x}$ **Sol:a)1/2 , b)0**

10.-Calcula a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}$ **a)-∞, b) 0**

11.-Calcula a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{e}{e^x-e}\right)$ Sol: ½ **b)Calcula** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\,x}\right)$ Sol:0

12.-Calcula: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{tg}\,x-8}{\sec x+10}$ **Sol:1**

13.-Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x-\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x-\text{sen}\,x}$ **Sol:1/3**

14.-Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$ **Sol:1/6**

15.-Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$ **Sol.**

16.-Calcula $Lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$ **Sol:-1**

17.-Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\operatorname{sen}^2 x}$ **Sol:0**

18.-Calcula $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x\cdot \operatorname{arc\,sen} x)$ **Sol:1**

19.-Calcula: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x-1)\sec 2x$ Sol: -1

20.-Calcula $\lim_{x\to 0}\ln(x)\cdot sen(x)$ **Sol:0**

21.- Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{sen\, x}\right)$ **Sol:0**

22.-Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ Sol:1/2

23.-Calcula $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$ **Sol:1/2**

24.-Calcula $Lím_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)$ **Sol: -2**

25.-Calcula $Lím_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x}-2x\right)=$ **Sol:** -5/4

Límites con parámetros.

26.-(2015/Junio/B/1)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b.

27.- (2014/Junio/A/1) Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\, sen(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.
Sol a=1; limite=-5.

28.-(2013/Junio/A/1) Sabiendo que el $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.
Sol: b=-1; limite =-1/3.

29.- (2012/Junio/B/1) Sabiendo que el $\lim_{x\to 0}\frac{a.sen(x)-x.e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y del límite.
Sol: a=1; limite =-1.

30.-(2005/M3/A/1) Se sabe que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha\cdot sen(x)}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.**Sol:** $\alpha=1; \boldsymbol{limite}=$**0.**

31.-(2004/M5/B/1) Se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite. **Sol: a=2; limite=-1 /2**

32.-(2001/Septiembre/B/1) Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+\alpha x}{x-sen\, x}$
Calcula dicho límite **Sol: α =-2; Limite=2**

33.-Hallar a para que: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$ **Sol: a=4**

34.-Calcular a para que el límite sea 8. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-ax}{x^2}$ **Sol: a=+-4**