

Ejercicios de límites

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = \infty \rightarrow \text{Calculamos límites laterales}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{27+18-9}{27+36+3-6} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1+2-3}{1+4+1-6} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} = \frac{1+3}{1+5+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{-27+18+9}{-27+36-3-6} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-x)}{(x+3)(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{9+3}{9-3-2} = \frac{12}{5}$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{x^2-4} = \frac{12-10-2}{4-4} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+5x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(-2)-1}{-2-2} = \frac{7}{4}$$

Ejemplo 7

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \frac{\sqrt{9}-3}{3-3} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-9}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = \frac{-1}{6}$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \frac{2 \cdot 4 - 8}{\sqrt{25} - 5} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)} \rightarrow \text{Operar denominador}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2+9-25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)} = \frac{2(\sqrt{25}+5)}{4+4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 9

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{3-\sqrt{2 \cdot (-2)^2+1}}{3(-2)-6} = \frac{3-\sqrt{9}}{-6-6} = \frac{0}{-12} = 0$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{3-\sqrt{2 \cdot (2)^2+1}}{3 \cdot 2 - 6} = \frac{3-\sqrt{9}}{6-6} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-\sqrt{2x^2+1})(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9-(2x^2+1)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2+8}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x^2-4)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} \rightarrow \text{Operar denominador}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{3(x-2)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x+2)}{3(3+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{-2(2+2)}{3(3+\sqrt{2(2)^2+1})} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{4}{2} - 3}{\frac{4}{4} - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x^2-\frac{1}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x+6}{4(x+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{4}{2}+6}{4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 2$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 6}{3x^2 - x + 5} = \frac{-\infty}{+\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Grado denominador} > \text{Grado numerador}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 6}{3x^2 - x + 5} = 0$$

Ejemplo 14

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 5x^2 + 6}}{3x^2 + 2x - 4} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 5x^2 + 6}}{3x^2 + 2x - 4} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$$

Ejemplo 15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 6x - 7}{x^2 - 5x + 3} = \frac{-\infty}{+\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Grado numerador} > \text{Grado denominador}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 6x - 7}{x^2 - 5x + 3} = -\infty$$

Ejemplo 16

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x + 2}{\sqrt[3]{x^6 + 3x^3 - 2x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x + 2}{\sqrt[3]{x^6 + 3x^3 - 2x}} = \frac{5}{1} = 5$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13x^2 - x}{\sqrt{169x^4 - x^2 + 8}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13x^2 - x}{\sqrt{169x^4 - x^2 + 8}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = 1$$

Ejemplo 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{25x^2-7}-5x) = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{25x^2-7}-5x)(\sqrt{25x^2-7}+5x)}{\sqrt{25x^2-7}+5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2-7-25x^2}{\sqrt{25x^2-7}+5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7}{\sqrt{25x^2-7}+5x} = \frac{-7}{\infty} = 0$$

Ejemplo 19

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{5} \right) = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+5-2x-8}{10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{10} = +\infty$$

Ejemplo 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2+x-3}) = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2+x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8x - \sqrt{16x^2+x-3})(8x + \sqrt{16x^2+x-3})}{8x + \sqrt{16x^2+x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{64x^2 - 16x^2 - x + 3}{8x + \sqrt{16x^2+x-3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{48x^2 - x + 3}{8x + \sqrt{16x^2+x-3}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Grado numerador} > \text{Grado denominador}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{48x^2 - x + 3}{8x + \sqrt{16x^2+x-3}} = \infty$$

Ejemplo 21. Encuentra el valor de a que verifica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x) = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Debemos calcular el límite e igualar a } \frac{1}{3} \text{ para obtener } a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x) = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+ax}-2x)(\sqrt{4x^2+ax}+2x)}{\sqrt{4x^2+ax}+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+ax-4x^2}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x} = \frac{a}{\sqrt{4+2}} = \frac{a}{4} \rightarrow \text{Igualamos el valor del límite a } \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 22

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{-1}{2}$$

Ejemplo 23

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x^2+4x)(2+x)-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+6x^2+12x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+6x^2+12x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2+6x+12=12$$

Ejemplo 24. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+8 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x-7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\exists f(3) = -2 \cdot 3 + 8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} -2x+8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x-7 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 = L$$

$$f(3) = L = 2$$

La función es continua en $x=3$

Ejemplo 25. Estudia la continuidad de la función en $x=-1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\exists f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -x + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=-1$

Ejemplo 26. Estudia la continuidad de la función en $x=2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$\exists f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 = L$$

$$f(2) = 3 \neq 4 = L$$

Discontinuidad evitable en $x=2$

Ejemplo 27. Estudia la continuidad de la función en $x=-2$ y en $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 6 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\exists f(-2) = -(-2)^2 + 6 = -4 + 6 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + 6) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 = L$$

$$f(-2) = 2 = L$$

Función continua en $x=-2$

$$\exists f(3) = -(3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 6) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -3 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=3$

Ejemplo 28

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos los l\u00edmites laterales}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Ejemplo 29. Indica el valor de k para que la funci\u00f3n sea continua en $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2x-2} & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ k & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\exists f\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{3x}{2x-2} = \frac{-3}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{3x}{2x-2} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = \frac{-3}{2} = L$$

$$\text{Por continuidad} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = k = L \rightarrow k = \frac{-3}{2}$$

Ejemplo 30. El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x + 7200}{2x + 1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x = 0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

$$f(0) = 7200 \text{ habitantes}$$

b) ¿Y dentro de dos años?

$$f(2) = \frac{14500 \cdot 2 + 7200}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{36200}{5} = 7240 \text{ habitantes}$$

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

Nos preguntan por el comportamiento de la función en un tiempo infinito. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14500x + 7200}{2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14500x + 7200}{2x + 1} = \frac{14500}{2} = 7250 \text{ habitantes}$$

La población muestra una asíntota horizontal en el valor $f(x) = 7250$ habitantes.