Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c) $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{2x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si \quad x>0 \end{matrix}\right\}$

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$\frac{3-x}{5-x}\geq 0$ → Raíz del numerador $x=3$; Raíz del denominador $x=5$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$(-\infty,3)$ → $x=0$ → $\frac{3}{5}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

$(3,5)$ → $x=4$ → $\frac{3-4}{5-4}<0$ → Intervalo no perteneciente al dominio

$(5,\infty)$ → $x=10$ → $\frac{3-10}{5-10}>0$ → Intervalo perteneciente al dominio

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$Dom(f)$ = (- ∞ , 3] U (5 , ∞)

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$(x+1)(2x+3)>0$ → Raíces $x=-1$, $x=\frac{-3}{2}$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-\frac{3}{2}) \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

$(\frac{-3}{2},-1) \rightarrow x=\frac{-5}{4} \rightarrow (\frac{-5}{4}+1)(2(\frac{-5}{4})+3)<0$ → intervalo no perteneciente al dominio

$(-1,\infty) \rightarrow x=0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

Solución final → $Dom(f)=(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-1,\infty)$

c) $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{2x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si \quad x>0 \end{matrix}\right\}$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para $x<0 \rightarrow f(x)=\frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x<0$ → La función es continua para todo valor $x<0$.

Para $x>0 \rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x>0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo → La función es continua para todo valor $x>0$.

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera $x=0$, aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(0)=\frac{0}{0-1}=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x-1}=0$, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x+1}=1$ → Los límites laterales no coinciden

La función no continua en $x=0 \rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$