1. Razona de manera justificada el dominio de la siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\cos(x)}$

a) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Mientras que el logaritmo solo admite argumentos positivos. Por lo tanto:

$$Dom(\sqrt{x}-1)=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\} \quad \rightarrow \quad Dom(\ln(\sqrt{x}-1))=(1,+\infty)$$

b) La raíz cuadrada solo admite discriminantes nulos o positivos. Y un cociente de polinomios no está definido en aquellos puntos que anulan el denominador. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right)=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\geq 0 \quad si \quad x\geq 1 \quad y \quad x\notin[2,3] \quad \rightarrow \quad Dom\left(\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}\right)$$ = [1, 2) U (3, +∞)

c) La función coseno se anula periódicamente en $x=\ldots,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$. Por lo tanto:

$$Dom\left(\frac{x}{\cos(x)}\right)=\mathbb{R}-(2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ **y** $x=5$ **.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & si \quad x<1\\ 2x-4 \quad si \quad 1\leq x\leq 5\\ \ln(x-5) \quad si \quad x>5\end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x=1$.

$$\exists f(1)=2\cdot 1-4=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x-4)=-2$$

$$f(1)=-2=L$$

La función es continua en $x=1$.

Estudiemos la continuidad en $x=5$.

$$\exists f(5)=2\cdot 5-4=6$$

$$\lim_{x\to 5^-}(2x-4)=6$$

$$\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)=-\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$.

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\infty-\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del numerador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x-1}{x+x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2\mathrm{x}+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}=\frac{-1}{\infty}=0$$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0}=\infty$ → Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

4. Sea la función $f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a,b y c son números reales. Calcula los valores de a,b y c sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y=2$ y que la gráfica pasa por el punto $(1,\frac{3}{2})$.

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}$$

Interpretamos analíticamente cada una de las frases del enunciado.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3 \quad\to\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1}=\frac{a}{1}=a \quad\to\quad a=3$$

$$Corte\ eje\ OY\ en\ y=2 \quad\to\quad f(0)=2 \quad\to\quad \frac{a+c}{1}=2 \quad\to\quad \frac{3+c}{1}=2 \quad\to\quad c=-1$$

$$f(x)\ pasa\ por\ (1,\frac{3}{2}) \quad\to\quad f(1)=\frac{3}{2} \quad\to\quad \frac{a+b+a+c}{1+1}=\frac{3}{2} \quad\to\quad \frac{b+5}{2}=\frac{3}{2} \quad\to\quad b=-2$$