

Ejercicio 1.

Los vectores \vec{u} y \vec{v} forman un ángulo de 60° y, además, $|\vec{u}|=5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}=15$

- Calcula $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ y $2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - \vec{v})$
- Halla la longitud del vector $\vec{u} - \vec{v}$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 15 = 5 \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{v}| = 6$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 5^2 + 15 = 40$

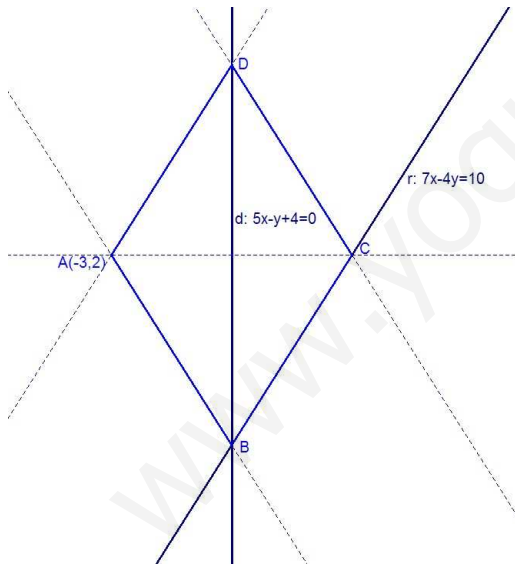
$2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - \vec{v}) = 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{v}|^2 = 6 \cdot 15 - 2 \cdot 6^2 = 18$

La longitud de $\vec{u} - \vec{v}$ es $|\vec{u} - \vec{v}|$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{25 - 2 \cdot 15 + 36} = \sqrt{31}$

Ejercicio 2.

De un rombo conocemos el vértice $A(-3,2)$, la ecuación de la recta que contiene a uno de los lados $r_1 \equiv 7x - 4y = 10$ y la ecuación de la recta que contiene a una de las diagonales $d_1 \equiv 5x - y + 4 = 0$. Calcula las coordenadas de los demás vértices y el área del rombo.



El punto A no está en las rectas que contienen a la diagonal y al lado, con lo que lo situamos fuera de ellas. Esta es una posible situación.

Así $B = r_1 \cap d_1 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 5x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -6)$

La otra diagonal d_2 es perpendicular a d_1 y pasa por A

$d_2 \equiv \begin{cases} A(-3,2) \\ \vec{u} = (5,-1) \end{cases} \Rightarrow d_2 \equiv \frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow d_2 \equiv x + 5y = 7$

$C = r_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ x + 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow C = (2, 1)$

También podríamos haber cortado las dos diagonales, obteniendo el centro del rombo que sería el punto medio de A, C y de B, D; condición suficiente para sacar ambos vértices.

Aún así vamos a obtener el punto D como corte de la recta r_2 , que contiene al lado \overline{AD} , con d_1 .

r_2 es paralela a r_1 y pasa por A $\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} A(-3,2) \\ \vec{v} = (4,7) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{7} \Rightarrow r_2 \equiv 7x - 4y = -29$

$$D = r_2 \cap d_1 \quad \begin{cases} 7x - 4y = -29 \\ 5x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow D = (1, 9)$$

Ahora la forma más rápida de calcular el área del rombo es: $\text{Área} = \frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} = (5, -1) \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{26} \\ \overline{BD} = (3, 15) \Rightarrow |\overline{BD}| = \sqrt{234} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{234}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 13} \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 13}}{2} = 39 u^2$$

Ejercicio 3.

Sean los vectores $\vec{u}_1 = (2, -1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 3)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

- Encuentra el ángulo que forman \vec{u}_1 y \vec{u}_2 .
- Si el vector \vec{v} tiene coordenadas $\vec{v} = (5, -3)$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, calcula las coordenadas de \vec{v} en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$$\vec{u}_1 = (2, -1) \Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u}_2 = (-1, 3) \Rightarrow |\vec{u}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cdot \cos \alpha \Rightarrow 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

$$\vec{v} = (5, -3) \text{ en la base } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

$$\vec{v} = (x, y) \text{ en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \Rightarrow \vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 ; \text{ además } \vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{u}_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$$\text{Entonces } 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \Rightarrow 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = x(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + y(-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \Rightarrow$$

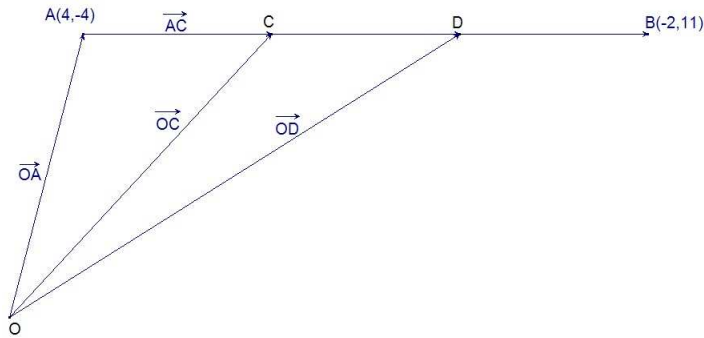
$$\Rightarrow 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (2x - y)\vec{e}_1 + (-x + 3y)\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2x - y \\ -3 = -x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{12}{5}\vec{u}_1 - \frac{1}{5}\vec{u}_2$$

$$\vec{v} = \left(\frac{12}{5}, -\frac{1}{5} \right) \text{ en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Ejercicio 4.

Sea el segmento de extremos $A(4, -4)$ y $B(-2, 11)$. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a $r \equiv 2x + y - 3 = 0$, que dividen dicho segmento en tres partes iguales.

Debemos calcular los dos puntos que dividen al segmento en tres partes iguales



$$\overline{AB} = (-6, 15)$$

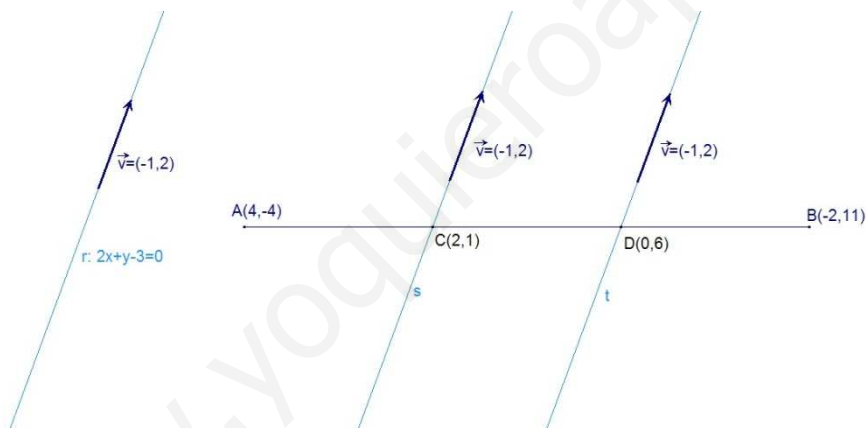
Las coordenadas del punto C son las mismas que las del vector \overline{OC}

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{OC} = (4, -4) + \frac{1}{3}(-6, 15) \Rightarrow \overline{OC} = (2, 1) \Rightarrow C = (2, 1)$$

Las coordenadas del punto D son las mismas que las del vector \overline{OD}

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{OD} = (4, -4) + \frac{2}{3}(-6, 15) \Rightarrow \overline{OD} = (0, 6) \Rightarrow D = (0, 6)$$

Ahora vamos a calcular las dos rectas que nos piden.



La recta s es paralela a r y pasa por el punto C

$$s \equiv \begin{cases} C(2, 1) \\ \vec{v} = (-1, 2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow s \equiv 2x + y - 5 = 0$$

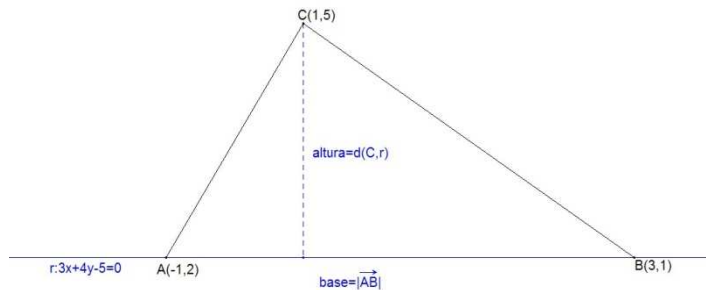
La recta t es paralela a r y pasa por el punto D

$$t \equiv \begin{cases} D(0, 6) \\ \vec{v} = (-1, 2) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-0}{-1} = \frac{y-6}{2} \Rightarrow t \equiv 2x + y - 6 = 0$$

Ejercicio 5.

En el triángulo de vértices $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ y $C(1,5)$, se pide:

- Calcular el área del triángulo.
- Encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

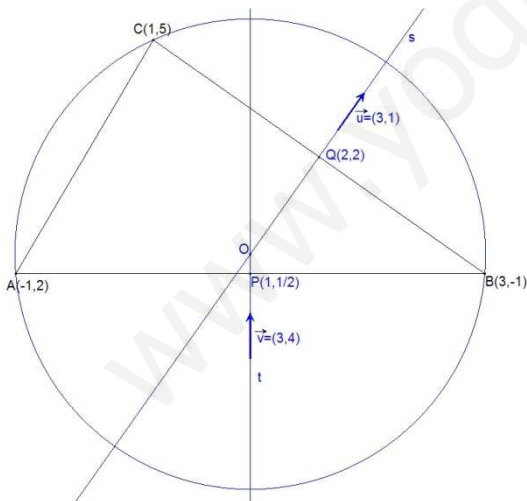


Tomamos como base el lado AB . Este lado está sobre la recta $r \equiv \begin{cases} A(-1,2) \\ \overline{AB} = (4,-3) \end{cases}$

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow r \equiv 3x+4y-5=0$$

$$\text{medida de la base} = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 ; \text{ medida de la altura} = d(C,r) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

$$\text{área del triángulo} = \frac{|\overline{AB}| \cdot d(C,r)}{2} = \frac{5 \cdot \frac{18}{5}}{2} = 9 \text{ u}^2$$



Para calcular la circunferencia circunscrita podemos seguir dos caminos :

1º) Calcular el centro y el radio.

El circuncentro O es el corte de las mediatrices

Calculemos dos de ellas :

$$s \equiv \begin{cases} Q(2,2) \text{ punto medio de } B \text{ y } C \\ \vec{u} = (3,1) \text{ vector perpendicular a } \overline{BC} = (-2,6) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow s \equiv x-3y+4=0$$

$$t \equiv \begin{cases} P\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ punto medio de } A \text{ y } B \\ \vec{v} = (3,4) \text{ vector perpendicular a } \overline{AB} = (4,-3) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4} \Rightarrow t \equiv 8x-6y-5=0$$

$$O = s \cap t: \begin{cases} x - 3y = -4 \\ 8x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{13}{6}, \frac{37}{18}\right)$$

El radio es la distancia de un vértice al centro, por ejemplo: $R = |\overline{AO}|$; $\overline{AO} = \left(\frac{19}{6}, \frac{1}{18}\right)$

$$R = |\overline{AO}| = \sqrt{\left(\frac{19}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{3250}{324}}$$

Ecuación de la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{18}\right)^2 = \frac{3250}{324} \Rightarrow x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{169}{36} + y^2 - \frac{37}{9}y + \frac{1369}{324} = \frac{3250}{324} \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{37}{9}y = \frac{10}{9}$$

Por tanto la circunferencia es $\boxed{9x^2 + 9y^2 - 39x - 37y - 10 = 0}$

2º) En este caso, como conocemos tres puntos por los que pasa la circunferencia, podemos determinarla directamente, ya que son tres condiciones.

La ecuación de una circunferencia tiene la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

como $A(-1, 2)$ está en la circunferencia $\Rightarrow (-1)^2 + 2^2 + D \cdot (-1) + E \cdot 2 + F = 0$

$B(3, -1)$ también $\Rightarrow 9 + 1 + 3D - E + F = 0$

igual para $C(1, 5) \Rightarrow 1 + 25 + D + 5E + F = 0$

$$\text{obtenemos el sistema } \begin{cases} D - 2E - F = 5 \\ 3D - E + F = -10 \\ D + 5E + F = -26 \end{cases} \Rightarrow \left\{ D = -\frac{13}{3}; E = -\frac{37}{9}; F = -\frac{10}{9} \right.$$

y la ecuación es $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{37}{9}y - \frac{10}{9} = 0 \Rightarrow \boxed{9x^2 + 9y^2 - 39x - 37y - 10 = 0}$