

LA RECTA EN EL PLANO

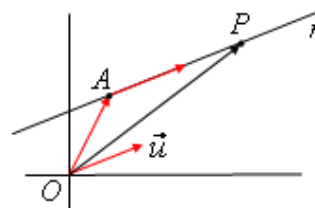
Recta en el plano

Una recta r viene determinada por un punto A y un vector director \vec{u} ; y P un punto de la recta:

Ecuación vectorial: $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{u}$

Si $A = (a_1, a_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y las coordenadas del punto genérico P son $P(x, y)$, la ecuación anterior puede escribirse:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2)$$



Ecuaciones paramétricas. Igualando las respectivas componentes resulta:
$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}$$

Ecuación continua. Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualamos las

dos expresiones obtenidas, resulta:
$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

Ejemplo:

Las ecuaciones de la recta que pasa por $A(1, 4)$ y tiene por vector director el $\vec{u} = (2, -3)$ son:

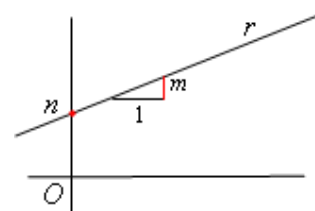
Vectorial: $(x, y) = (1, 4) + \lambda(2, -3)$. Paramétricas:
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$$
 Continua:
$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$$

Ecuación punto-pendiente. Se deduce de la ecuación continua:
$$y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x - a_1)$$

Si llamamos $m = \frac{u_2}{u_1}$, la ecuación queda $y - a_2 = m(x - a_1)$.

El cociente $m = \frac{u_2}{u_1}$ es la pendiente de la recta: es la tangente

trigonométrica del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje OX . La pendiente m indica lo que aumenta (o disminuye) la variable y por cada aumento unitario de la variable x .



Ecuación explícita. Despejando y en la ecuación punto-pendiente se obtiene $y = mx + n$.

Al número n se le llama ordenada en el origen.

Ejemplo

La recta $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$ puede escribirse también así: $y - 4 = \frac{-3}{2}(x - 1) \rightarrow$ Punto pendiente

Despejando: $y - 4 = \frac{-3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \rightarrow$ Explícita.

Ecuación general. También se llama ecuación implícita o cartesiana.

Se deduce de la continua. Es $Ax + By + C = 0$. A , B y C son números; x y y son variables, que indican las coordenadas de los puntos de esa recta, siendo x la abscisa e y la ordenada.

- Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.
- Para representar una recta basta con conocer dos de sus puntos.

Ejemplo:

La recta $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$ puede escribirse también así: $-3(x - 1) = 2(y - 4) \Leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0$.

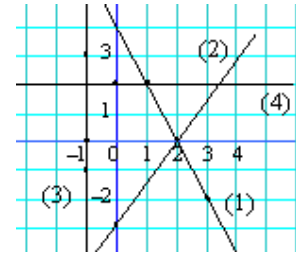
Ejemplo:

Son ecuaciones de una recta: $2x + y - 4 = 0$ (1); $-3x + 2y + 6 = 0$ (2); $x = -1$ (3); $y = 2$ (4)

El punto $(3, -2)$ pertenece a la recta (1), pues $2 \cdot 3 + (-2) - 4 = 0$. Ese punto $(3, -2)$ no es de ninguna otra recta. Los puntos $(0, -3)$ y $(2, 0)$ son de la recta (2). El punto $(1, 2)$ pertenece a las rectas (1) y (4).

Los puntos $(-1, 0)$, $(-1, 3)$, $(-1, -1)$, siempre $x = -1$, son de la recta (3).

Los puntos $(-2, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, siempre $y = 2$, son de la recta (4).



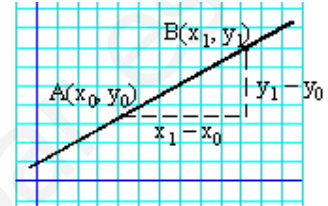
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

La ecuación de la recta que pasa por $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ es

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

La misma expresión se obtiene partiendo de la ecuación

$y = mx + n$ e imponiendo que los puntos A y B la cumplan.



Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por $A = (-2, 1)$ y $B = (3, 4)$ será:

$$\frac{x - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{y - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow \frac{x + 2}{5} = \frac{y - 1}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y + 11 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

Posición relativa de dos rectas

En el plano, dos rectas pueden ser secante, paralelas o coincidentes. Su posición se determina estudiando el sistema asociado a ellas. Así, la posición de las rectas $r: Ax + By + C = 0$ y

$$s: A'x + B'y + C' = 0, \text{ viene determinada por la solución de } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad

El ángulo que forman dos rectas r y s coincide con el que forman sus respectivos vectores \vec{v}_r

$$\text{y } \vec{v}_s. \text{ Por tanto: } \cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Así, $y = mx + n$ e $y = mx + n'$ son paralelas. También son paralelas las rectas $r: Ax + By + C = 0$ y $s: Ax + By + C' = 0$.
- Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes vale -1 . Por tanto, las rectas $y = mx + n$ e $y = -\frac{1}{m}x + n'$ serán perpendiculares.

Ejemplos:

- a) $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 2$ son paralelas. b) $y = 2x - 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 1$ son perpendiculares.

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ es $d(P, r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

Ejemplo: Para $P(1, -3)$ y $r: 2x + 5y + 3 = 0$, $d(P, r) = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$.