

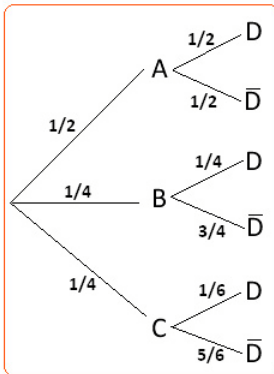
## PAU: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

1. Una fábrica de coches tiene tres cadenas distintas de producción que fabrican, respectivamente,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/4$  del total de los coches producidos. La probabilidad de que un coche sea defectuoso es: para la primera cadena  $1/2$ , para la segunda  $1/4$  y para la tercera  $1/6$ .

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea defectuoso?

b) Si un coche es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la primera cadena?

Solución:



$$a) P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{17}{48}$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{17}{48} = \frac{31}{48}$$

$$P(\bar{D}/A) = \frac{1}{2} \quad P(\bar{D}/B) = \frac{3}{4} \quad P(\bar{D}/C) = \frac{5}{6}$$

$$b) P(A/\bar{D}) = \frac{P(A) \cdot P(\bar{D}/A)}{P(A) \cdot P(\bar{D}/A) + P(B) \cdot P(\bar{D}/B) + P(C) \cdot P(\bar{D}/C)} =$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/2}{1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 3/4 + 1/4 \cdot 5/6} = \frac{1/4}{1/4 + 3/16 + 5/24} = \frac{12}{31}$$

2. Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Supóngase que uno de los estudiantes que realiza el examen responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 5 o más preguntas?. ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte ninguna?

Solución:

Se trata de una distribución binomial  $B(8; 0,25)$ , donde el número de preguntas  $n = 8$  y la probabilidad de acierto  $p = 1/4 = 0,25$ , por tanto  $q = 0,75$

Sea  $X =$  'número de respuestas acertadas'

$$P(X \geq 5) = \binom{8}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^3 + \binom{8}{6} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^2 + \binom{8}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75 + \binom{8}{8} \cdot 0,25^8 = 0,027$$

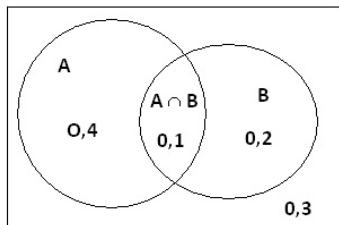
$$P(\text{no acertar ninguna}) = 0,75^8 = 0,1$$

3. Sean A y B dos sucesos tales que  $P(A) = 0,5$ ,  $P(B) = 0,3$  y  $P(A \cap B) = 0,1$

Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(A/B) \quad P(A/A \cap B) \quad P(A \cap B/A \cup B) \quad P(A/A \cup B)$$

Solución:



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/A \cap B) = \frac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

$$P(A \cap B/A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}$$

$$P(A/A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}$$

4. Considérense los siguientes datos: 9, 11, 7, 12, 11

a) Calcular la media, varianza y desviación típica.

b) Considérese también el conjunto de datos obtenidos sumando 20 a cada uno de los datos iniciales. Razonar, sin efectuar nuevos cálculos, cuál de los dos conjuntos está más disperso respecto de su media.

Solución:

$$a) \text{ Media: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{N} = 10$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{N} = 3,2$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3,2} = 1,79$$

b) Al sumar o restar la misma constante a todos los datos, la *varianza permanece invariante*, mientras que la media y el *coeficiente de variación de Pearson* varían.

- $E(x) = \bar{x} \quad \mapsto \quad E(k+x) = E(k) + E(x) = k + \bar{x}$

- $\text{Var}(x) = \sigma^2 \quad \mapsto \quad \sigma_{k+x}^2 = \text{Var}(k+x) = \text{Var}(k) + \text{Var}(x) = 0 + \sigma_x^2$

- $\sigma_{k+x} = \sqrt{\sigma_{k+x}^2} = \sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x$

- Coeficiente variación Pearson:

$$C.V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad C.V_{k+x} = \frac{\sigma_{k+x}}{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\bar{x} + 20} \quad \mapsto \quad C.V_x > C.V_{k+x}$$

En este sentido,

$$E(20+x) = 20 + \bar{x} \quad \sigma_{20+x}^2 = \sigma_x^2 = 3,2 \quad \sigma_{20+x} = \sigma_x = 1,79$$

$$C.V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{1,79}{10} = 0,179 \quad C.V_{20+x} = \frac{\sigma_x}{\bar{x} + 20} = \frac{1,79}{30} = 0,059$$

Es más disperso el conjunto de datos inicial.

5. Los pesos en kg de 20 alumnos de cierto centro son: 51, 47, 55, 53, 49, 47, 48, 50, 43, 60, 45, 54, 62, 57, 46, 49, 52, 42, 38, 61.

a) Agrupar los datos en clases de amplitud 5, siendo el extremo inferior del primer intervalo 37,5. Dibujar el correspondiente histograma y calcular la media de los datos agrupados.

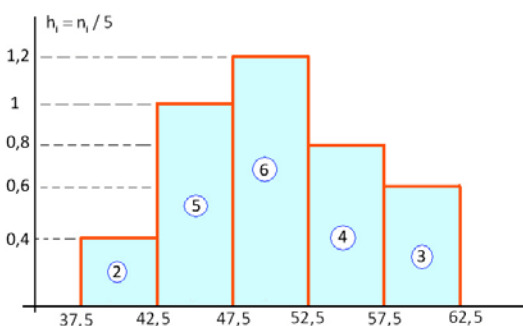
b) Comparar la proporción de observaciones en el primer intervalo con la que cabría esperar bajo una distribución normal de media 50 y desviación típica 6,4.

**Solución:**

a)

Intervalo	$x_i$	$n_i$	$x_i \cdot n_i$	$h_i = n_i / 5$
37,5 – 42,5	40	2	80	0,4
42,5 – 47,5	45	5	225	1
47,5 – 52,5	50	6	300	1,2
52,5 – 57,5	55	4	220	0,8
57,5 – 62,5	60	3	180	0,6

$$\sum_{i=1}^5 x_i \cdot n_i = 1005$$



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot n_i}{N} = \frac{1005}{20} = 50,25$$

b) La proporción en el intervalo  $[37,5 - 42,5)$  es  $2/20 = 0,1$

En una distribución normal  $N(50; 6,4)$  la proporción sería:

$$P(37,5 \leq x \leq 42,5) = P\left(\frac{37,5 - 50}{6,4} \leq \frac{x - 50}{6,4} \leq \frac{42,5 - 50}{6,4}\right) = P(-1,95 \leq z \leq -1,17) =$$

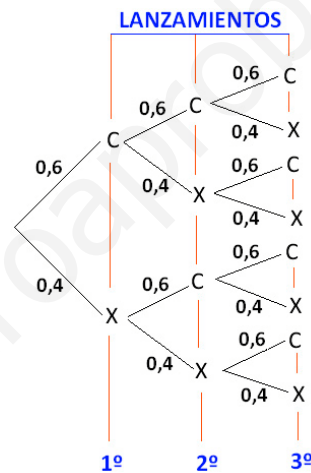
$$= P(1,17 \leq z \leq 1,95) = P(z \geq 1,17) - P(z \geq 1,95) = 0,1210 - 0,0256 = 0,0954$$

6. Se considera el experimento de lanzar una moneda tres veces. Se pide:

- Construir el espacio muestral
- Suponiendo que la moneda esté cargada y que la probabilidad de cara sea de 0,6. ¿cuáles son las probabilidades de los sucesos elementales?.

**Solución:**

a) El espacio muestral con el diagrama de árbol:



$$E = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (c, x, x), (x, c, c), (x, c, x), (x, x, c), (x, x, x)\}$$

b)  $P(c) = 0,6$      $P(x) = 0,4$

$$P(c, c, c) = 0,6^3 \quad P(c, c, x) = 0,6^2 \cdot 0,4 \quad P(c, x, c) = 0,6^2 \cdot 0,4 \quad P(c, x, x) = 0,6 \cdot 0,4^2$$

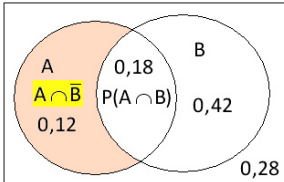
$$P(x, c, c) = 0,6^2 \cdot 0,4 \quad P(x, c, x) = 0,6 \cdot 0,4^2 \quad P(x, x, c) = 0,6 \cdot 0,4^2 \quad P(x, x, x) = 0,4^3$$

7. Sean A y B dos sucesos independientes. La probabilidad de que suceda el suceso B es de 0,6. Sabemos que  $P(A / B) = 0,3$

- Calcula la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.
- Calcula la probabilidad de que suceda el suceso A pero no el B.

**Solución:**

Por ser independientes  $\Rightarrow \begin{cases} P(A / B) = P(A) = 0,3 \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \end{cases}$



a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$

o también,  $P(A \cup B) = 0,12 + 0,18 + 0,42 = 0,72$

b) Si A y B son independientes, también lo son A y  $\bar{B}$ , con lo cual:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

8. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

- Calcula la probabilidad de que el número premiado acabe en 5.
- Calcula la probabilidad de que el número premiado acabe en 55.
- Sabiendo que ayer salió un número acabado en 5, calcula la probabilidad de que el número de hoy acabe también en 5.

**Solución:**

a) En el juego hay 1.000 papeletas, entre ellas hay un total de  $VR_{10,2} = 10^2 = 100$  que acaban en 5.

$$P(\text{acabe en 5}) = \frac{100}{1000} = 0,1$$

b) Hay 10 papeletas que acaban en 55, con lo que:

$$P(\text{acabe en 55}) = \frac{10}{1000} = 0,01$$

c) Los números que salgan en el sorteo son independientes del día.

$$P(\text{acabe en 5}) = \frac{100}{1000} = 0,1$$

9. Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos: 88 , 90 , 90 , 86 , 87 , 88 , 91 , 92 , 89

Halla un intervalo de confianza al 95% para la media poblacional, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos.

**Solución:**

Un intervalo de confianza  $(1 - \alpha)$  para un parámetro poblacional se define:

$$I_{1-\alpha}(\text{parámetro poblacional}) = [\text{parámetro muestral} \pm \text{error muestral}]$$

En este caso, se trata de construir un intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  de varianza  $\sigma^2 = 1,8^2$  conocida, es decir:

$$I_{1-\alpha} = \left[ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad 1 - \alpha = 0,95 \quad z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$\bar{x} = \frac{88 + 80 + 90 + 90 + 86 + 87 + 88 + 91 + 92 + 89}{9} = 89 \text{ gr}$$

$$I_{0,95} = \left[ 89 \pm 1,96 \frac{1,8}{\sqrt{9}} \right] = [87,824 ; 90,176]$$

$$\text{Error muestral: } \varepsilon = 1,96 \frac{1,8}{\sqrt{9}} = 1,176$$

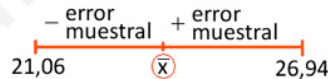
$$\text{Longitud Intervalo: } L = 2 \cdot \varepsilon = 2 \cdot 1,176 = 2,352$$

**10.** La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley normal con desviación típica de 7,5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21,06 ; 26,94) para la longitud media.

- Calcula la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.
- Calcula el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

**Solución:**

$$a) I_{1-\alpha}(\mu) = [\bar{x} \pm \text{error muestral}]$$



$$\bar{x} = \frac{21,06 + 26,94}{2} = 24 \text{ m}$$

b) El intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  de varianza  $\sigma^2$

$$\text{conocida, viene dado por la relación: } I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

En esta línea, con  $n = 25$ ,  $\bar{x} = 24$ ,  $\sigma = 7,5$

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ 24 \pm z_{\alpha/2} \frac{7,5}{\sqrt{25}} \right] = \left[ 24 - z_{\alpha/2} \frac{7,5}{\sqrt{25}} ; 24 + z_{\alpha/2} \frac{7,5}{\sqrt{25}} \right] = (21,06 ; 26,94)$$

$$\text{Longitud Intervalo: } L = 26,94 - 21,06 = 5,88$$

$$\text{Error muestral: } \varepsilon = \frac{L}{2} = 2,94 = z_{\alpha/2} \frac{7,5}{\sqrt{25}} \quad \mapsto \quad z_{\alpha/2} = \frac{2,94 \cdot 5}{7,5} = 1,96$$

Observando la tabla de la normal  $N(0, 1)$  se tiene:

$$z_{\alpha/2} = 1,96 \mapsto \alpha/2 = 0,0250 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

El nivel de confianza  $1 - \alpha = 0,95$  (95%)

**11.** Un supervisor somete una muestra de 16 fusibles a cierta sobrecarga. Los tiempos que tardaron en fundirse dieron una media de 10,63 minutos. Considerando que la variable 'tiempo que tarda en fundirse un fusible sometido a esa sobrecarga es normal' con desviación típica de 2,48 minutos.

- Construye un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%.
- ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 1 minuto, con un nivel de confianza del 95%?

**Solución:**

a) El intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  de varianza  $\sigma^2$  conocida, viene dado por la relación:  $I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

Siendo:  $n = 16$ ,  $\bar{x} = 10,63$ ,  $\sigma = 2,48$ ,  $1 - \alpha = 0,95$ ,  $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ 10,63 \pm 1,96 \frac{2,48}{\sqrt{16}} \right] = [9,41 ; 11,84]$$

b) Error muestral:  $\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mapsto 1 = 1,96 \frac{2,48}{\sqrt{n}}$

$$n = (1,96 \cdot 2,48)^2 = 23,62 \approx 24$$

Las muestras deben de ser de tamaño 24 o mayor.

**12.** En una cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el de ventas, 200 en el de contabilidad y 100 en el de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

- ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear para que en la muestra estén representados todos los departamentos?
- ¿Qué número de trabajadores de cada departamento habrá en la muestra?

**Solución:**

a) Se debe utilizar un muestreo aleatorio estratificado, ya que la población se encuentra dividida en cuatro estratos (cuatro departamentos), y además se quiere que haya elementos en la muestra de todos los estratos.

b) La población está formada por  $150 + 450 + 200 + 100 = 900$  elementos.

Los integrantes de la muestra de cada departamento se repartirán de forma proporcional a los trabajadores de cada departamento.

$$\frac{180}{900} = 0,2 = \frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0,2 \cdot 150 = 30 & \text{Personal} \\ n_2 = 0,2 \cdot 450 = 90 & \text{Ventas} \\ n_3 = 0,2 \cdot 200 = 40 & \text{Contabilidad} \\ n_4 = 0,2 \cdot 100 = 20 & \text{Atención Cliente} \end{cases}$$

**13.** En una ciudad se seleccionó al azar una muestra de 225 familias. A cada familia seleccionada se le preguntó si tenía contratado algún seguro de incendios. Se obtuvo como resultado que 75 familias tenían contratado dicho seguro. A partir de esa información, determina:

- El intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias de esa ciudad que tienen contratado algún seguro de incendios.
- El error máximo que cometeríamos, con una confianza del 95%, si diéramos como estimación de dicha proporción el cociente  $\frac{75}{225}$

**Solución:**

a) La proporción muestral  $\hat{p} = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$ ,  $\hat{q} = \frac{2}{3}$ , donde  $n = 225$

$$1 - \alpha = 0,95 \quad \mapsto \quad z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

El intervalo de confianza para la proporción  $p$  de una población viene dado

por la expresión:  $I_{1-\alpha}(p) = \left[ \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right]$

$$I_{0,95}(p) = \left[ \frac{1}{3} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{225}} \right] = (0,272 ; 0,395)$$

b) Error muestral:  $\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$ , o bien,  $L = 2 \cdot \varepsilon$

$$L = 2 \cdot \varepsilon = 0,395 - 0,272 = 0,123 \quad \mapsto \quad \varepsilon = 0,0615$$

$$\text{o bien, } \varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{225}} = 0,0615$$

El error máximo que se cometería es del 6,15%



**14.** El alcalde de una ciudad prometió en su programa oponerse a la construcción de una central de tratamiento de ciertos residuos, puesto que en aquel momento sólo un 10% de los ciudadanos estaba a favor de la central.

En los últimos días se ha encuestado a 100 personas de las cuales 14 están a favor de la central. El alcalde afirma, sin embargo, que el porcentaje de los ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido.

- a) Plantea un test para contrastar la hipótesis defendida por el alcalde a que sucedió lo contrario, como parecen indicar los datos. Si se concluye que el porcentaje ha aumentado y la hipótesis del alcalde fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?
- b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 5%.

**Solución:**

- a) Se trata de un contraste unilateral para la proporción.

Hipótesis nula  $H_0: p \leq 0,1$       *El alcalde tiene razón*

Hipótesis alternativa  $H_a: p > 0,1$       *El porcentaje ha aumentado*

**Si se admitiera que el porcentaje ha aumentado** (rechazando la hipótesis nula), y esto **fuera falso**, se cometería un **error TIPO I**.

Si se admitiera la hipótesis nula, **afirmando que el alcalde lleva razón**, el porcentaje no ha cambiado, y esto **fuera falso**, se cometería un **error TIPO II**.

Es mucho más grave cometer un error TIPO II.

- b) Estadístico de contraste para aceptar  $H_0$ : 
$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} \leq z_\alpha$$

$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_{0,05} = 1,645 \quad n = 100 \quad \hat{p} = 0,14 \quad \hat{q} = 0,86$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} = \frac{0,14 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}} = 1,152 < 1,645 = z_{0,05}$$

En consecuencia, se acepta la hipótesis nula, llevaba razón el alcalde, con una fiabilidad del 95%, al afirmar que la situación no había cambiado.

15. El número de reclamaciones presentadas durante la campaña de Navidad en 9 tiendas de una empresa ha sido: 25, 31, 28, 30, 32, 20, 22, 34, 30

Se acepta que estos números de reclamaciones siguen una distribución normal con desviación típica igual a 5. Se desea contrastar si el número de reclamaciones es 26, con un nivel de significación de 0,05

- Plantéense cuáles son las hipótesis nula y alternativa en el contraste.
- Determinése la región crítica del contraste.
- ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

**Solución:**

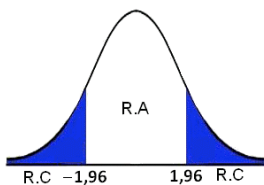
- Se trata de un contraste bilateral para la media de una población normal con varianza conocida.

Hipótesis nula  $H_0: \mu = 26$

Hipótesis alternativa  $H_a: \mu \neq 26$

Estadístico de contraste para aceptar  $H_0: z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$

b)



$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96$$

- $\sigma = 5$  reclamaciones       $n = 9$  tiendas

$$\bar{x} = \frac{25 + 31 + 28 + 30 + 32 + 20 + 22 + 34 + 30}{9} = 28 \text{ reclamaciones}$$

$$\text{Como } z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{|28 - 26|}{5 / \sqrt{9}} = 1,2 < 1,96 = z_{0,025}$$

Por tanto, se admite la hipótesis nula, concluyendo que el número medio de reclamaciones presentadas es 26.

**16.** La media de una variable aleatoria X con distribución normal es 5 veces la desviación típica. Además se verifica:  $P(X \leq 6) = 0,8413$   
Calcula la media y la desviación típica de la variable aleatoria X.

**Solución:**

La variable aleatoria X sigue una distribución normal  $N(\mu = 5\sigma, \sigma)$

$$P(X \leq 6) = P\left(\frac{X - 5\sigma}{\sigma} \leq \frac{6 - 5\sigma}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{6 - 5\sigma}{\sigma}\right) = 0,8413$$

$$P\left(z \geq \frac{6 - 5\sigma}{\sigma}\right) = 0,1587, \text{ en la tabla } N(0, 1) \text{ se observa } P(z \geq 1) = 0,1587$$

$$\frac{6 - 5\sigma}{\sigma} = 1 \mapsto \sigma = 1 \quad \mu = 5\sigma = 5$$

**17.** Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen normalmente con media 0. Además  $P(X \geq 2) = P(Y \geq 3) = 0,1587$ . Calcula sus respectivas varianzas.

**Solución:**

Sean las variables aleatorias  $X \sim N(0, \sigma_1)$  e  $Y \sim N(0, \sigma_2)$

$$P(X \geq 2) = P\left(\frac{X - 0}{\sigma_1} \geq \frac{2 - 0}{\sigma_1}\right) = P\left(z \geq \frac{2}{\sigma_1}\right) = 0,1587$$

$$P(Y \geq 3) = P\left(\frac{Y - 0}{\sigma_2} \geq \frac{3 - 0}{\sigma_2}\right) = P\left(z \geq \frac{3}{\sigma_2}\right) = 0,1587$$

En la tabla  $N(0, 1)$ , se observa  $P(z \geq 1) = 0,1587$ , de donde:

$$\frac{2}{\sigma_1} = 1 \mapsto \sigma_1 = 2 \mapsto \sigma_1^2 = 4 \quad \frac{3}{\sigma_2} = 1 \mapsto \sigma_2 = 3 \mapsto \sigma_2^2 = 9$$

**18.** El consumo de carne de pollo parece haberse disparado desde que hace unos meses cundió la alarma sobre otros tipos de carne. En cierta carnicería, las ventas diarias de carne de pollo seguían hasta entonces una normal de media 19 kilos y desviación típica 3 kilos. En una muestra de 35 días posteriores a la citada alarma se obtuvo una media de 21 kilos de carne de pollo vendidos al día. Suponiendo que las ventas siguen una normal con la misma desviación típica:

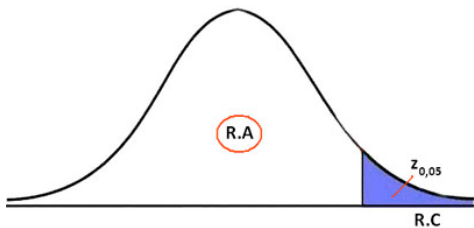
- Plantea un test para contrastar que la venta de pollo no ha aumentado, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega a un nivel de significación del 5%?
- Calcula un intervalo de confianza del 95% para la venta diaria media de carne de pollo.

**Solución:**

a) Se trata de un contraste unilateral para la media poblacional con varianza conocida. Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula  $H_0 : \mu = 19 \text{ kg}$

Hipótesis alternativa  $H_a : \mu > 19 \text{ kg}$



Se acepta  $H_0$  si el estadístico de contraste

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha}$$

Región Aceptación  $\equiv (-\infty ; 1,645)$

$$\bar{x} = 21 \text{ kg} \quad n = 35 \text{ días} \quad \sigma = 3 \text{ kg} \quad \alpha = 0,05 \rightarrow z_{0,05} = 1,645$$

$$\text{Siendo } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{21 - 19}{3 / \sqrt{35}} = 3,94 > 1,645 = z_{0,05}$$

Se rechaza la hipótesis nula, aceptando en consecuencia la hipótesis alternativa, afirmando que el consumo medio de carne de pollo ha aumentado con la alarma, con una fiabilidad del 95%.

Adviértase que  $3,94 \notin (-\infty ; 1,645)$ , es un valor que está fuera de la región de aceptación.

b) El Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución

normal de varianza conocida:  $I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  donde  $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\text{con lo cual, } I_{0,95}(\mu) = \left[ 21 \pm 1,96 \frac{3}{\sqrt{35}} \right] = [20,01 ; 21,99]$$

Se observa que  $19 \notin [20,01 ; 21,99]$ , se encuentra fuera del intervalo de confianza

19. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es de 0,6; la de que pase la segunda es de 0,8, y la de que pase ambas es de 0,5. Halla las siguientes probabilidades:

- Que pase al menos una prueba.
- Que no pase ninguna prueba.
- ¿Son las pruebas sucesos independientes?
- Que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera.

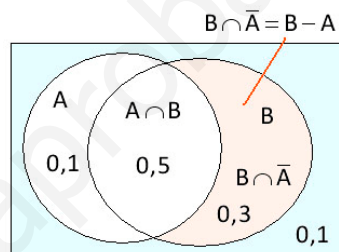
**Solución:**

Sean los sucesos :

$$\begin{cases} A = \text{"pasar la primera prueba"} & P(A) = 0,6 & P(\bar{A}) = 0,4 \\ B = \text{"pasar la segunda prueba"} & P(B) = 0,8 & P(\bar{B}) = 0,2 \\ A \cap B = \text{"pasar las pruebas A y B"} & P(A \cap B) = 0,5 & P(\overline{A \cap B}) = 0,5 \end{cases}$$

Leyes de Morgan:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$        $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$



$$a) \begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9 \\ P(A \cup B) = 0,1 + 0,5 + 0,3 = 0,9 \end{cases}$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$c) A \text{ y } B \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,5 \neq 0,6 \cdot 0,8 = 0,48 = P(A) \cdot P(B)$$

No son independientes

$$d) P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

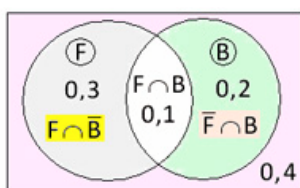
$$\text{Siendo } B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \begin{cases} P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ 0,8 = 0,5 + P(\bar{A} \cap B) \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0,3 \end{cases}$$

- 20.** En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto, y el 10% practica ambos deportes. Además hay un 60% que no juega al fútbol. Halla la probabilidad de que, escogido al azar un alumno de la clase:
- Juegue sólo al fútbol.
  - Juegue sólo al baloncesto.
  - Practique uno solo de los deportes.
  - No juegue ni al fútbol ni al baloncesto.

**Solución:**

Sean los sucesos:  $F$  = "juega al fútbol"  $B$  = "juega al baloncesto"

$$P(F \cup B) = 0,6 \quad P(F \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{F}) = 0,6 \quad \mapsto \quad P(F) = 0,4$$



$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \quad \mapsto \quad \begin{cases} 0,6 = 0,4 + P(B) - 0,1 \\ P(B) = 0,3 \end{cases}$$

- $P(F \cap \bar{B}) = P(F) - P(F \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$
- $P(\bar{F} \cap B) = P(B) - P(F \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2$
- $P(F \cap \bar{B}) + P(\bar{F} \cap B) = 0,3 + 0,2 = 0,5$
- $P(\bar{F} \cap \bar{B}) = P(\overline{F \cup B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$

**21.** Un dado con las caras numeradas del 1 al 6 está trucado de modo que la probabilidad de obtener un número es directamente proporcional a dicho número.

- Halla la probabilidad de que salga 3 si se sabe que salió impar.
- Calcula la probabilidad de que salga par si se sabe que salió mayor que 3.

**Solución:**

$$P(1) = x \quad P(2) = 2x \quad P(3) = 3x \quad P(4) = 4x \quad P(5) = 5x \quad P(6) = 6x$$

$$P(\Omega) = 1 = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x \quad \mapsto \quad x = \frac{1}{21}$$

$$a) \quad P(3 / \text{salió impar}) = \frac{P(3)}{P(1,3,5)} = \frac{\frac{3}{21}}{\frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad P(\text{par} / \text{mayor que } 3) = \frac{P(4,6)}{P(4,5,6)} = \frac{\frac{4}{21} + \frac{6}{21}}{\frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

22. a) Halla la probabilidad de obtener al menos un seis doble en n tiradas de dos dados.

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que la probabilidad anterior sea de  $\frac{1}{2}$ ?

**Solución:**

a) Denotando el suceso  $A_i$  = "sacar 6 doble en la tirada i-ésima".

La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \overline{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)} = \\ &= 1 - \overline{P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n)} = \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = 1 - [P(\bar{A}_1)]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \end{aligned}$$

Adviértase que todos los sucesos son independientes y tienen la misma probabilidad.

$$P(\text{al menos un 6 doble en } n \text{ tiradas de dos dados}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$b) 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \quad \mapsto \quad \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \quad \mapsto \quad \ln\left(\frac{35}{36}\right)^n = \ln\frac{1}{2} \quad \mapsto \quad \ln\left(\frac{35}{36}\right)^n = \ln\frac{1}{2}$$

$$n(\ln 35 - \ln 36) = -\ln 2 \quad \mapsto \quad n = \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} \approx 25 \text{ partidas}$$

23. Si la probabilidad de que ocurra un suceso A es  $\frac{1}{5}$ , ¿cuál es el mínimo número de veces que hay que repetir el experimento para que la probabilidad de que ocurra al menos una vez el suceso A sea mayor que  $\frac{1}{2}$ ? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos dos veces A al realizar 5 veces el experimento?.

**Solución:**

a)  $X$  = "número de éxitos en n pruebas",  $X \sim B(n, 0,2)$ ,  $p = 0,2$ ,  $q = 0,8$

$$P(X \geq 1) > \frac{1}{2} \quad \mapsto \quad P(X < 1) \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) \leq \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^n = 0,8^n \leq \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{0,8^4 = 0,4096} \quad n = 4$$

Para que el suceso A tenga al menos una probabilidad mayor  $\frac{1}{2}$ , hay que repetir el proceso un mínimo de 4 veces.

b) Se trata de una distribución binomial  $B(5; 0,2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \left[ \binom{5}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 \right] =$$

$$= 1 - (0,3277 + 0,4096) = 0,2627$$

24. Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tales que  $P(A) = 0,5$  y  $P(\bar{B}) = 0,8$ . Calcúlese:

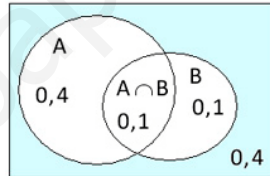
- a)  $P(A \cap B)$  y  $P(A \cup B)$   
 b)  $P(\bar{A} / \bar{B})$

**Solución:**

a)  $P(A) = 0,5 \rightarrow P(\bar{A}) = 0,5 \quad P(\bar{B}) = 0,8 \rightarrow P(B) = 0,2$

A y B independientes  $\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \end{cases} \quad \bar{A} \text{ y } \bar{B} \text{ independientes}$

$$P(A \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6 \\ 0,4 + 0,1 + 0,1 = 0,6 \end{cases}$$



$$P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

b)  $P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

o también,  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$

25. La distancia diaria recorrida, en kilómetros, por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  desconocida y desviación típica  $\sigma = 16$  km.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo (159 ; 165). Determinése el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.  
 b) Si la media de la distancia recorrida fuera  $\mu = 160$  km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra,  $\bar{X}$ , sea mayor que 156 km.

**Solución:**

- a) Se trata de un intervalo de confianza para la media de una población  $\mu$  de varianza conocida:



$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \mapsto P \left[ \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

El Intervalo de confianza está centrado en la media  $\bar{X}$ :

$$\bar{X} = \frac{159 + 165}{2} = 162$$

Longitud del intervalo:  $L = 2 \epsilon = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 165 - 159 = 6$

Error estimación:  $\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3$

siendo  $\sigma = 16$  km y  $n = 81$  taxis, se tiene:  $\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{16}{\sqrt{81}} = 3 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{27}{16} = 1,69$

Observando en la tabla  $N(0, 1)$ :  $z_{\alpha/2} = 1,69 \mapsto \alpha/2 = 0,0455$

$\alpha = 0,091 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,91$  (91% nivel de confianza)

b) La media muestral  $\bar{x} \sim N\left(160, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) \approx N(160, 2)$   
 $n = 64$  taxis  $\mu = 160$  km

tipificando, se obtiene:

$$P(\bar{X} > 156) = P\left(\frac{\bar{X} - 160}{2} > \frac{156 - 160}{2}\right) = P(z > -2) = P(z < 2) = 0,97725$$

**26.** En un estudio de mercado se necesita comparar las ventas en meses de diciembre de dos años consecutivos para decidir si existen diferencias significativas entre ambos. Se dispone de datos del primer año en 52 tiendas que proporciona una media muestral de 942,30 euros y una desviación típica de 49 euros. En el segundo año se han observado las ventas en 64 tiendas obteniendo una venta media de 981,20 euros y una desviación típica de 74 euros.

- Plantea un contraste de hipótesis para decidir si existen diferencias entre las ventas en ambos meses de diciembre.
- Contrasta la hipótesis con un nivel de significación de 0,05.
- ¿Cuál es el error del tipo I en este contraste?. ¿Con qué probabilidad se comete?
- ¿En qué consiste el error de tipo II?

**Solución:**

a) Se trata de un contraste bilateral de igualdad de medias de dos poblaciones normales  $N(\mu_1, \sigma_1)$  y  $N(\mu_2, \sigma_2)$  de varianzas poblacionales desconocidas, con muestras grandes  $n_1 + n_2 > 30$

Las variables aleatorias  $X = \text{"ventas primer año"}$  e  $Y = \text{"ventas segundo año"}$ , donde  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  e  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$       Hipótesis alternativa:  $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

b) Si el estadístico de contraste  $z = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} \leq z_{\alpha/2}$  se acepta la hipótesis

nula con un nivel de confianza  $(1 - \alpha)$

donde  $s_x^2$  y  $s_y^2$  son, respectivamente, las cuasivarianzas muestrales de las dos poblaciones  $X$  e  $Y$ . En general, se tiene la relación:  $n_x \cdot \sigma_x^2 = (n_x - 1) \cdot s_x^2$

Se tiene  $\begin{cases} \bar{x} = 942,3 & n_x = 52 & \sigma_x = 49 \\ \bar{y} = 981,2 & n_y = 64 & \sigma_y = 74 \end{cases}$

$$s_x^2 = \frac{n_x \cdot \sigma_x^2}{(n_x - 1)} = \frac{52 \cdot 49^2}{51} = 2448,08 \quad s_y^2 = \frac{n_y \cdot \sigma_y^2}{(n_y - 1)} = \frac{64 \cdot 74^2}{63} = 5562,92$$

Con un error de significación  $\alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

La Región de Aceptación será  $(-1,96 ; 1,96)$

En consecuencia,

$$z = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} = \frac{|942,3 - 981,2|}{\sqrt{\frac{2448,08}{52} + \frac{5562,92}{64}}} = 3,36 > 1,96 = z_{\alpha/2}$$

Por lo que se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que hay diferencias significativas entre las ventas del producto en diciembre, con una fiabilidad del 95%

Adviértase que la diferencia de medias muestrales  $(\bar{x} - \bar{y})$  bajo la hipótesis nula sigue una distribución muestral

$$(\bar{x} - \bar{y}) \sim N\left(\mu_x - \mu_y; \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}\right) \equiv N\left[0; \sqrt{\frac{2448,08}{52} + \frac{5562,92}{64}}\right] = N(0; 11,58)$$

En el caso de haber construido un intervalo de confianza:

$$I_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[ (\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \right] = \left[ (942,3 - 981,2) \pm 1,96 \sqrt{\frac{2448,08}{52} + \frac{5562,92}{64}} \right]$$

$$I_{0,95}(\mu_1 - \mu_2) = [-61,59 ; -16,21]$$

Como el intervalo no cubre el 0 hay diferencias significativas entre las medias poblacionales con un nivel de confianza del 95%.

$$c) \alpha = P[ET I] = P[\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}] = P[\bar{x} - \bar{y} \neq 0 / H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0] = 0,05$$

El error Tipo I consiste en afirmar que las ventas son distintas en el mes de diciembre de ambos años cuando en realidad son iguales. La probabilidad de cometer un error tipo I es de 0,05

$$d) \beta = P[ET II] = P[\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ falsa}] = P[\bar{x} - \bar{y} = 0 / H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0]$$

El error Tipo II consiste en afirmar que las ventas son iguales en el mes de diciembre de ambos años cuando en realidad son distintas.

**27.** Se ha realizado una encuesta sobre una población de escasa cultura, de la que solo un 15% ha leído más de tres libros. Elegida al azar una muestra de 50 personas, calcula:

- La probabilidad de que haya más de cinco personas que han leído más de tres libros.
- La probabilidad de que como máximo haya seis personas que han leído más de tres libros.

**Solución:**

Sea la variable aleatoria  $X = \text{"número de personas que han leído mas de tres libros"}$ , donde  $X \sim B(50 ; 0,15)$ , donde:

$$n = 50 \quad p = 0,15 \quad q = 0,85 \quad \mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,15 = 7,5 > 5 \quad n \cdot q = 50 \cdot 0,85 = 42,5 > 5$$

Como  $\mu = n \cdot p > 5$  y  $n \cdot q > 5$ , la distribución binomial  $B(50 ; 0,15)$  se puede aproximar a una distribución normal  $N(\mu = n \cdot p ; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q})$ , con lo cual:

$$X \sim N(50 \cdot 0,15 ; \sigma = \sqrt{50 \cdot 0,15 \cdot 0,85}), \text{ es decir, } X \sim N(7,5 ; \sigma = 2,525)$$

Cuando la variable aleatoria discreta  $X$  toma valores  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  al considerar la variable como continua, en un intervalo se establece el factor de corrección:

$$P(a < X < b) = P(a + 0,5 \leq X \leq b - 0,5) \quad P(a \leq X \leq b) = P(a - 0,5 \leq X \leq b + 0,5)$$

$$a) P(X > 5) = P(X' > 5,5) = P\left(\frac{X' - 7,5}{2,525} > \frac{5,5 - 7,5}{2,525}\right) = P(z > -0,79) = P(z < 0,79) =$$

$$= 1 - P(z \geq 0,79) = 1 - 0,2148 = 0,7852$$

$$b) P(X \leq 6) = P(X' \leq 6,5) = P\left(\frac{X' - 7,5}{2,525} \leq \frac{6,5 - 7,5}{2,525}\right) = P(z \leq -0,39) = P(z \geq 0,39) = 0,3483$$

**28.** Una compañía de autobuses realiza un estudio sobre el número de veces que semanalmente utilizan el autobús los usuarios. Se sabe que los datos se distribuyen en una normal  $N(10, 3)$ . Calcula la probabilidad de que un usuario utilice el autobús:

- Más de 11 veces.
- Menos de 8 veces.

**Solución:**

La variable aleatoria  $X$ ="número de veces que un individuo toma el autobús en una semana" es discreta, teniendo que considerar cada valor de la variable discreta como marca de clase, estableciendo el factor de corrección:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = P(a - 0,5 \leq X' \leq a + 0,5)$$

$$a) P(X > 11) = P(X' > 11,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} > \frac{11,5 - 10}{3}\right) = P(z > 0,5) = 0,3085$$

$$b) P(X \leq 8) = P(X' \leq 7,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} \leq \frac{7,5 - 10}{3}\right) = P(z \leq -0,83) = P(z \geq 0,83) = 0,2033$$

**29.** Supón que en cierta población pediátrica, la presión sistólica de la sangre en reposo se distribuye normalmente con media de 115 mm Hg y desviación típica de 15.

- Halla la probabilidad de que un niño elegido al azar en esta población tenga presión sistólica superior a 145 mm Hg.
- ¿Por debajo de qué valor de presión sistólica estará el 75% de los niños?

**Solución:**

La variable aleatoria  $X$ ="presión sistólica medida en mm Hg",  $X \sim N(115; 15)$

$$a) P(X > 145) = P\left(\frac{X - 115}{15} > \frac{145 - 115}{15}\right) = P(z > 2) = 0,0228$$

$$b) P(X \leq k) = 0,75 \quad \mapsto \quad P\left(\frac{X - 115}{15} \leq \frac{k - 115}{15}\right) = P\left(z \leq \frac{k - 115}{15}\right) = 0,75$$

$$P\left(z \leq \frac{k - 115}{15}\right) = 0,75 \quad \rightarrow \quad P\left(z \geq \frac{k - 115}{15}\right) = 0,25$$

Observando en la tabla de la  $N(0, 1)$  se tiene que  $P(z \geq 0,67) = 0,2546$  y  $P(z \geq 0,68) = 0,2483$ . Puede tomarse el valor 0,67 por estar más próximo, o bien se puede interpolar.

Eligiendo 0,67, queda:  $\frac{k-115}{15} = 0,67 \mapsto k = 115 + 15 \cdot 0,67 \approx 125$  mm Hg

**30.** Se ha comprobado que el tiempo de espera (en minutos) hasta ser atendido, en cierto servicio de urgencias, sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 personas que fueron atendidas en dicho servicio, se ha calculado un tiempo medio de espera de 14,25 minutos y una desviación típica de 2,5 minutos.

- ¿Podríamos afirmar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de espera, en ese servicio de urgencias, no es de 15 minutos?
- ¿Qué podríamos concluir si el nivel de significación hubiese sido del 0,1%?
- ¿Existe contradicción en ambas situaciones?

**Solución:**

a) Se trata de un contraste bilateral de la media de una población normal con varianza poblacional desconocida, con muestras grandes  $n = 100 > 30$ .

Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : \mu = 15$  minutos    Hipótesis alternativa:  $H_a : \mu \neq 15$  minutos

Con el estadístico de contraste  $z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s_x / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$  se acepta  $H_0$

$\alpha = 0,05 \mapsto z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

Región Aceptación  $R.A = \{z : -z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}\} \equiv R.A \sim (-1,96 ; 1,96)$

$\bar{x} = 14,25 \quad n = 100 \quad \sigma_x = 2,5 \quad (n-1)s_x^2 = n\sigma_x^2 \Rightarrow \begin{cases} s_x^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n-1} = \frac{100 \cdot 2,5^2}{99} = 6,31 \\ s_x = \sqrt{6,31} = 2,51 \end{cases}$

La cuasivarianza muestral  $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}$

Estadístico de contraste  $z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{|14,25 - 15|}{2,51 / \sqrt{100}} = 2,99 > 1,96 = z_{0,025}$

Con lo que se rechaza la hipótesis nula, no pudiendo afirmar, con una fiabilidad del 95%, que el tiempo medio de espera en el servicio de urgencias sea de 15 minutos.

b)  $\alpha = 0,001 \mapsto z_{\alpha/2} = z_{0,0005} = 3,27 \mapsto R.A \sim (-3,27 ; 3,27)$

Siendo  $z = 2,99 < 3,27 = z_{0,0005}$  se aceptaría la hipótesis nula, pudiendo afirmar con una fiabilidad del 99,9%, que el tiempo medio de espera en el servicio de urgencias es de 15 minutos.

c) No existe ninguna contradicción. A mayor nivel de confianza  $(1 - \alpha)$ , la longitud del intervalo de confianza es mayor porque el error muestral

$$\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

es más grande. Adviértase que la longitud del intervalo:  $L = 2\epsilon$

**31.** Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6,5 años, con una desviación típica de 4.

¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleado en esa fábrica es menor o igual que 6?. Justifica adecuadamente la respuesta.

**Solución:**

Se trata de un contraste unilateral de la media de una población normal con varianza poblacional desconocida, con muestras grandes  $n = 64 > 30$ .

Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : \mu \leq 6$  años    Hipótesis alternativa:  $H_a : \mu > 6$  años

Con el estadístico de contraste  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x / \sqrt{n}} \leq z_\alpha$  se acepta  $H_0$ ; en caso contrario se rechaza, aceptándose la hipótesis alternativa  $H_a$

contrario se rechaza, aceptándose la hipótesis alternativa  $H_a$

$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$$

Región Aceptación  $R.A = \{z : z \leq z_\alpha\} \equiv R.A \sim (-\infty ; 1,96]$

$$\bar{x} = 6,5 \quad n = 64 \quad \sigma_x = 4 \quad (n-1)s_x^2 = n\sigma_x^2 \Rightarrow \begin{cases} s_x^2 = \frac{n\sigma_x^2}{n-1} = \frac{64 \cdot 4^2}{63} = 16,25 \\ s_x = \sqrt{16,25} = 4,03 \end{cases}$$

La cuasivarianza muestral  $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}$

$$\text{Estadístico de contraste } z = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{6,5 - 6}{4,03 / \sqrt{64}} = 0,99 < 1,645 = z_{0,05}$$

Con lo que se acepta la hipótesis nula , pudiendo afirmar con una fiabilidad del 95%, que el tiempo medio de empleo en la fábrica es menor o igual que 6 años.

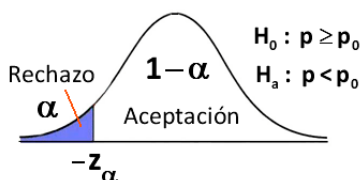
**32.** Se afirma que, en una determinada ciudad, al menos el 30% de las familias poseen ordenador. Se toma una muestra aleatoria de 200 familias de la ciudad y resulta que 50 poseen ordenador.

A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación?

**Solución:**

Se trata de un contraste unilateral para el parámetro  $p$  de una distribución binomial. Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : p \geq 0,3$  Hipótesis alternativa:  $H_a : p < 0,3$



$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$$

$$\text{Región Aceptación R.A} \equiv (-1,645 ; \infty)$$

Si el estadístico de contraste  $z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} > -z_\alpha$  se acepta  $H_0$

$$\hat{p} = \frac{50}{200} = 0,25 \quad \hat{q} = 0,75 \quad n = 200$$

$$\text{Estadístico de contraste } z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} = \frac{0,25 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{200}}} = -1,63 > -1,645 = z_{0,05}$$

Con lo que se acepta la hipótesis nula , pudiendo afirmar que al menos el 30% de las familias poseen ordenador, con una fiabilidad del 95%.

**33.** Se trabaja con la hipótesis se que uno de cada diez varones manifiesta algún tipo de daltonismo.

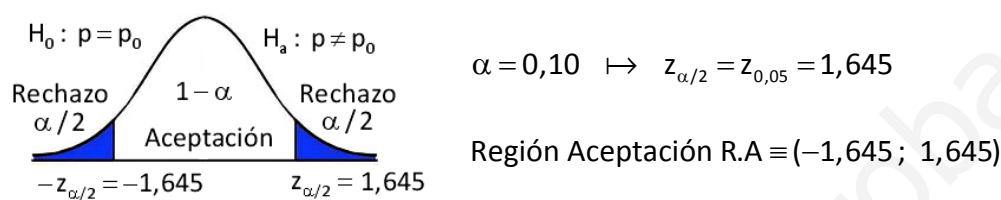
a) Elegidos 400 varones, se detectan 50 daltónicos. Con un nivel de significación del 10%, ¿se puede aceptar la hipótesis de partida?

b) Sobre la muestra estudiada en (a), ¿se obtendría la misma conclusión si  $\alpha = 0,02$ ?

**Solución:**

a) Se trata de un contraste bilateral para el parámetro  $p$  de una distribución binomial. Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : p = 0,1$  Hipótesis alternativa:  $H_a : p \neq 0,1$



Si el estadístico de contraste  $z = \frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} \leq z_{\alpha/2}$  se acepta  $H_0$

$$\hat{p} = \frac{50}{400} = 0,125 \quad \hat{q} = 0,875 \quad n = 400$$

$$\text{Estadístico de contraste } z = \frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} = \frac{|0,125 - 0,1|}{\sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{400}}} = 1,512 \leq 1,645 = z_{0,05}$$

Con lo que se acepta la hipótesis nula , pudiendo afirmar que cada uno de diez varones manifiesta algún tipo de daltonismo, con un nivel de confianza del 90%.

b) Si  $\alpha = 0,02 \mapsto z_{\alpha/2} = z_{0,01} = 2,33$ .

Siendo la región de aceptación  $(-2,33 ; 2,33)$

Como  $z = 1,512 \leq 2,33 = z_{0,01}$  se acepta la hipótesis nula , pudiendo afirmar que cada uno de diez varones manifiesta algún tipo de daltonismo, con una fiabilidad del 98%.

Adviértase que a mayor nivel de confianza, la región de aceptación es mayor.



**34.** El 42% de los escolares de un cierto país suelen perder un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias.

Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido.

a) Contrasta, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

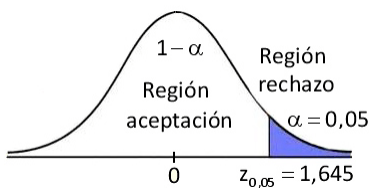
b) ¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido?

**Solución:**

a) Se trata de un contraste unilateral para la proporción de una distribución binomial. Se establecen las hipótesis:

Hipótesis nula  $H_0 : p \leq 0,42$       Hipótesis alternativa  $H_a : p > 0,42$

Estadístico de contraste para aceptar  $H_0 : z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} \leq z_\alpha$



$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$$

La región de aceptación se determina con el nivel de significación, así Región Aceptación:  $(-\infty, 1,645)$

En la muestra:  $n=1000$      $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0,45$      $\hat{q} = 1 - 0,45 = 0,55$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} = \frac{0,45 - 0,42}{\sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1000}}} = 1,91 > 1,645 = z_{0,05}$$

Con lo que se rechaza la hipótesis nula, aceptando con un nivel de confianza del 95% que la proporción ha aumentado

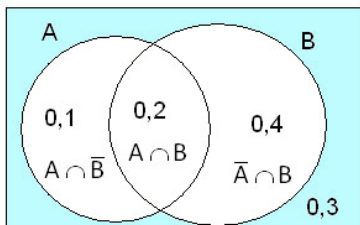
b) La probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido, es aceptar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es falsa. Es un error Tipo II.

35. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, siendo  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,6$  y  $P(A \cap \bar{B})$ . Se pide hallar:  $P(A \cap B)$ ,  $P(A/B)$  y  $P(\bar{A}/\bar{B})$

**Solución:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,2 = 0,7$$



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - 0,6} = \frac{1 - 0,7}{0,4} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}$$

36. Sean A y B dos sucesos tales que  $P(A) = 0,6$ . Calcular  $P(A \cap \bar{B})$  en cada caso:

- A y B son mutuamente excluyentes
- A está contenido en B
- B está contenido en A y  $P(B) = 0,3$
- $P(A \cap B) = 0,1$

**Solución:**

a) A y B mutuamente excluyentes  $\Rightarrow A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - 0 = 0,6$$

b)  $A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) = 0$

c)  $B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B) = 0,6 - 0,3 = 0,3$$

d)  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,1 = 0,5$

37. Se sabe que  $P(B/A) = 0,9$ ,  $P(A/B) = 0,2$  y  $P(A) = 0,1$

- Calcular  $P(A \cap B)$  y  $P(B)$
- ¿Son independientes los sucesos A y B?
- Calcular  $P(A \cup \bar{B})$

**Solución:**

$$a) P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0,9 \quad \mapsto \quad P(B \cap A) = 0,9 \times P(A) = 0,9 \times 0,1 = 0,09$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,2 \quad \mapsto \quad P(A \cap B) = 0,2 \times P(B) = 0,09 \quad \mapsto \quad P(B) = \frac{0,09}{0,2} = 0,45$$

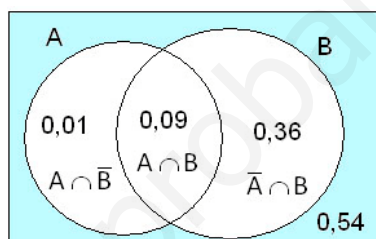
$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,45 = 0,55$$

b) Los sucesos no son independientes, dado que:

$$P(A \cap B) = 0,09 \neq P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,45$$

o bien, no son independientes porque

$$P(A/B) = 0,2 \neq P(A) = 0,1$$



$$c) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,45 = 0,55$$

$$P(A \cup \bar{B}) = \begin{cases} = 0,1 + 0,54 = 0,64 \\ = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,1 + 0,55 - 0,01 = 0,64 \end{cases}$$

38. Sean A y B dos sucesos incompatibles, con  $P(A \cup B) > 0$

$$\text{demostrar que } P(B/A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

**Solución:**

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \quad \mapsto \quad A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0 \quad \mapsto \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(B/A \cup B) = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

39. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, con  $P(A \cap B) = 0,1$ ,  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$  y  $P(A/B) = 0,5$ . Calcular  $P(B)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A)$  y  $P(\bar{B}/\bar{A})$

**Solución:**

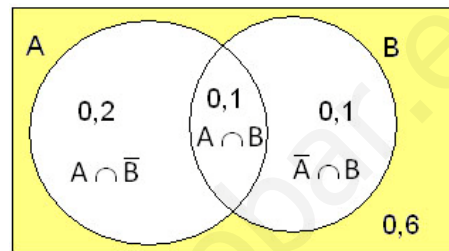
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,6 \quad \mapsto \quad P(A \cup B) = 0,4$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \quad \mapsto \quad P(A \cap B) = 0,5 \times P(B) = 0,1 \quad \mapsto \quad P(B) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \mapsto \quad 0,4 = P(A) + 0,2 - 0,1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = 0,4 \quad \mapsto \quad P(\overline{A \cup B}) = 0,6$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7}$$



40. El 38% de los habitantes de una ciudad declaran que su deporte preferido es el fútbol, el 21% prefiere el baloncesto y el resto se inclina por otro deporte. Si se eligen al azar tres personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- Las tres personas sean aficionadas al fútbol
- Dos personas prefieran el futbol y la otra el baloncesto
- Al menos una de las tres personas prefiera otro deporte diferente al fútbol y al baloncesto

**Solución:**

a) Sea el suceso A = "Las tres personas son aficionadas al fútbol"  $P(A) = 0,38^3 = 0,0549$

b) Sea el suceso B = "dos personas prefieren el fútbol y otra el baloncesto"

El número de formas posibles que se pueden elegir dos personas, entre tres,  $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$

$$P(B) = 3 \cdot 0,38^2 \cdot 0,21 = 0,09097$$

c) Sea el suceso C = "Al menos una de las tres personas prefiere otro deporte que no sea el fútbol ni el baloncesto"

El suceso contrario  $\bar{C}$  = "Las tres personas prefieren el fútbol o el baloncesto"

$$P(\bar{C}) = (0,38 + 0,21)^3 = 0,2054 \quad \mapsto \quad P(C) = 1 - 0,2054 = 0,7946$$

**41.** En una ciudad el 50% de la población son hombres, el 30% de la población consume aceite de girasol y el 20% son hombres que consumen aceite de girasol. Se elige una persona al azar de dicha población.

- Si es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que consuma aceite de girasol?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y consuma aceite de girasol?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre sabiendo que no consume aceite de girasol?

**Solución:**

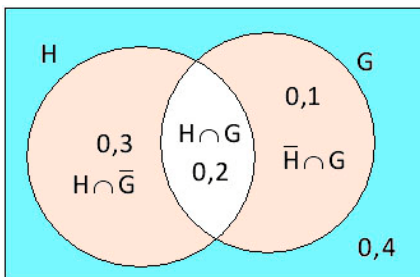
Sean los sucesos :

$H$  = "es hombre"    $\bar{H}$  = "es mujer"

$G$  = "consume aceite de girasol"    $\bar{G}$  = "no consume aceite de girasol"

a)  $P(H) = 0,5$     $P(\bar{H}) = 0,5$     $P(G) = 0,3$     $P(H \cap G) = 0,2$

$$P(G/H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$



b)  $P(\bar{H} \cap G) = P(G) - P(H \cap G) = 0,1$

c)  $P(H/\bar{G}) = \frac{P(H \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{0,3}{0,7} = 0,4286$

**42.** El estudio de una entidad bancaria informa que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y el 40% de los que tienen un préstamo personal también tienen un préstamo hipotecario.

Calcula el porcentaje de clientes que:

- Tienen ambos tipos de préstamo.
- No tienen ninguno de los dos tipos de préstamo.

**Solución:**

Sean los sucesos :

$A$  = "tener préstamo hipotecario"    $B$  = "tener préstamo personal"

$P(A) = 0,6$     $P(B) = 0,5$     $P(A/B) = 0,4$

a)  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0,5} = 0,4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$  (20%)

b)  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$   
 $= 1 - (0,6 + 0,5 - 0,2) = 0,1$  (10 %)

**43.** Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en Bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtienen beneficios.

De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtienen beneficios. Halla:

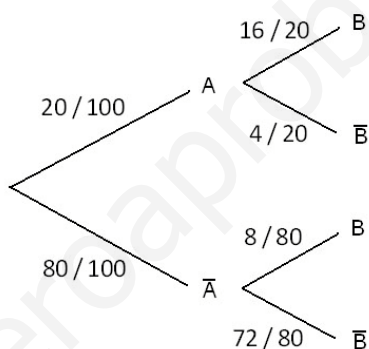
- El tanto por ciento de los que compran acciones en Bolsa que obtienen beneficios.
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona al azar que no tenga conocimientos bursátiles y no obtenga beneficios?

**Solución:**

Sean los sucesos:  $A = \text{"Sabe de Bolsa"}$   $B = \text{"Beneficios"}$

Para observar la conversión, se reflejan los datos en una tabla de contingencia y en un diagrama de árbol.

	Sabe de Bolsa $A$	No sabe de Bolsa $\bar{A}$	Total
Beneficios $B$	16 $A \cap B$	8 $\bar{A} \cap B$	24
No Beneficios $\bar{B}$	4 $A \cap \bar{B}$	72 $\bar{A} \cap \bar{B}$	76
Total	20	80	100



$$a) P(B) = \begin{cases} = \frac{24}{100} = 0,24 \\ = \frac{20}{100} \times \frac{16}{20} + \frac{80}{100} \times \frac{8}{80} = 0,24 \end{cases} \quad (24\%)$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \begin{cases} = \frac{72}{100} = 0,72 \\ = P(\bar{A}) \times P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{80}{100} \times \frac{72}{80} = 0,72 \end{cases}$$

**44.** Un examen tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro posibles respuestas de las que sólo una es correcta. Si un alumno constesta al azar, calcula las siguientes probabilidades:

- Aprobar el examen.
- Acertar menos de 20 preguntas.

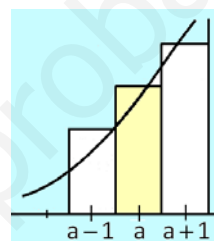
**Solución:**

La variable aleatoria  $X$  = "número preguntas bien contestadas" sigue una distribución binomial  $B(100, 0,25)$  donde,  $n=100$  ,  $p=1/4=0,25$  ,  $q=0,75$

La distribución  $B(100, 0,25)$  se aproxima a una distribución normal  $N(np, \sqrt{npq})$  al verificar  $\mu = np = 100 \times 0,25 = 25 > 5$      $nq = 100 \times 0,75 = 75 > 5$

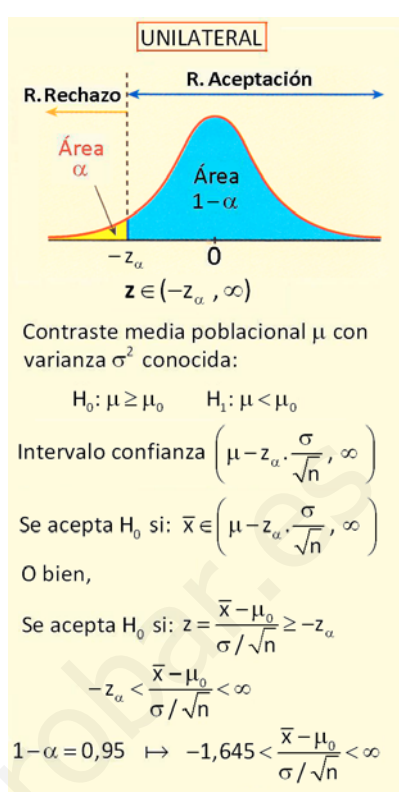
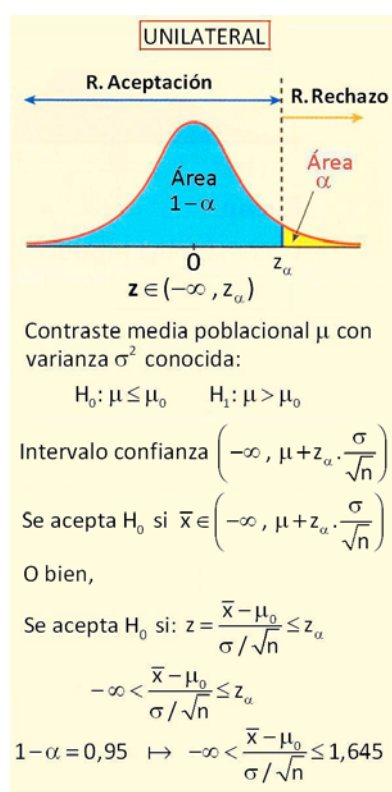
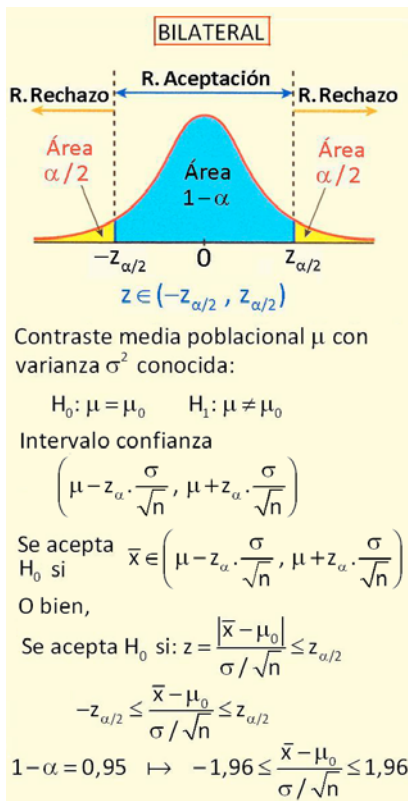
$X \sim B(100, 0,25)$  se aproxima a  $X \sim N(25, \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75}) \equiv N(25, 4,33)$

Al pasar de una distribución binomial (discreta) a una distribución normal (continua), un valor de la binomial  $a$  se transforma en un intervalo de la normal  $(a - 0,5, a + 0,5)$



$$a) P(X \geq 50) = P(X \geq 49,5) = P\left[\frac{X - 25}{4,33} \geq \frac{49,5 - 25}{4,33}\right] = P(z \geq 5,66) = 0$$

$$b) P(X < 20) = P(X < 19,5) = P\left[\frac{X - 25}{4,33} < \frac{19,5 - 25}{4,33}\right] = P\left[\frac{X - 25}{4,33} < \frac{19,5 - 25}{4,33}\right] = \\ = P(z < -1,27) = P(z \geq 1,27) = 0,1020$$



**TEÓRICO** El contenido de una proteína se distribuye en individuos sanos según una  $N(20, 0,5)$ . En individuos con la enfermedad E se cree que la distribución normal sigue siendo razonable pero se sospecha que su valor medio podría alterarse. Supondremos que no cambia la variabilidad, por lo que el contenido de la proteína en presencia de E, variable aleatoria X, sigue una normal  $N(\mu, 0,5)$ . Por lo costoso de las determinaciones de dicha proteína se toma una muestra de 5 individuos con la enfermedad y se obtienen los siguientes valores: 22,2 , 21 , 18,8 , 21,5 , 20,5.

a) Con un nivel de confianza del 95%, ¿se puede admitir que la media de la proteína para los individuos con la enfermedad E se altera?.

- $H_0: \mu = 20 \quad H_1: \mu \neq 20$  *contraste bilateral*

$\alpha = 0,05 \mapsto \alpha/2 = 0,025 \mapsto z_{0,025} = 1,96$  *estadístico teórico*

Muestra:  $n = 5 \quad \bar{x} = 20,8 \quad \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv N\left(\mu, \frac{0,5}{\sqrt{5}}\right)$

Intervalo de confianza:  $\left( \mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \mapsto$   
 $\mapsto \left( 20 - 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{5}}, 20 + 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{5}} \right) = (19,56, 20,44)$

$\bar{x} = 20,8 \notin (19,56, 20,44) \mapsto$  No se acepta la hipótesis nula  $H_0$  , con un nivel de confianza del 95%

- También se podría haber realizado de la siguiente forma:



$$\alpha = 0,05 \mapsto z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96 \mapsto \begin{cases} \text{Región aceptación: } (-1,96, 1,96) \\ \text{Región crítica: } (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty) \end{cases}$$

Bajo la hipótesis nula  $H_0: \mu = 20$ ,  $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv N\left(20, \frac{0,5}{\sqrt{5}}\right) \equiv N(20, 0,22)$

En consecuencia,  $P\left[-1,96 \leq z = \frac{\bar{x} - 20}{0,22} \leq 1,96\right] = 1 - \alpha = 0,95$

Hay una probabilidad de 0,95 de que el valor  $\frac{\bar{x} - 20}{0,22}$  se encuentre entre  $-1,96$  y  $1,96$ .

estadístico contraste

$$z = \frac{\bar{x} - 20}{0,22} = \frac{20,8 - 20}{0,22} = 3,64 \notin (-1,96, 1,96) \mapsto \text{Se rechaza } H_0$$

En definitiva, se toma la decisión de rechazar la hipótesis nula, rechazando que la media es 20 y aceptando la hipótesis alternativa que es distinta de 20.

Las probabilidades conocidas, a priori, en esta forma de decidir son:

$$P[\text{Rechazar } H_0: \mu=20 \text{ siendo cierta } H_0] = 0,05 = \alpha$$

$$P[\text{Aceptar } H_0: \mu=20 \text{ siendo cierta } H_0] = 0,95 = 1 - \alpha$$

Pudiendo rellenar parte de la tabla siguiente:

		Decisión	
		$H_0$	$H_1$
Realidad	Cierta $H_0$	$1 - \alpha = 0,95$	$\alpha = 0,05$ Error tipo I
	Cierta $H_1$		



Si  $H_0$  no es cierta  
¿Qué probabilidad hay de decidir que es cierta?



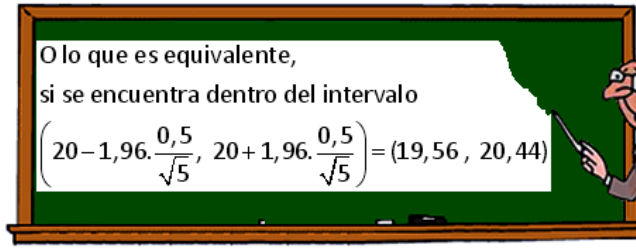
Supongo que la hipótesis alternativa  
 $H_1: \mu = 21$



Dices que si  $\mu \neq 20$   
¿Qué probabilidad hay de aceptar que vale 20?



Hay que pensar si el estadístico del contraste  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{0,22}$  se encuentra en la región de aceptación  $(-1,96, 1,96)$  bajo la hipótesis  $H_1: \mu = 21$



Bajo la hipótesis  $H_1: \mu = 21$ ,  $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv N\left(21, \frac{0,5}{\sqrt{5}}\right) \equiv N(21, 0,22)$

$$P[19,56 < \bar{x} < 20,44] = P\left[\frac{19,56 - 21}{0,22} < \frac{\bar{x} - 21}{0,22} < \frac{20,44 - 21}{0,22}\right] = P[-6,54 < z < -2,54] =$$

$$= P[2,54 < z < 6,54] = P[z > 2,54] - P[z > 6,54] = 0,00554$$

Adviértase que  $P[\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}] \equiv P[\text{Aceptar } H_0 | H_1 \text{ es cierta}] = 0,00554 = \beta$

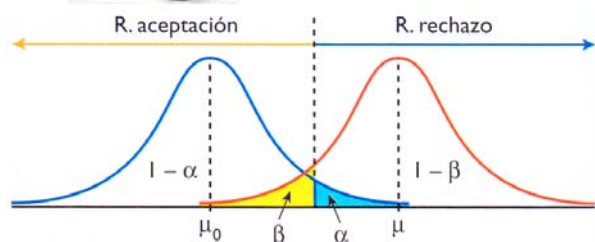
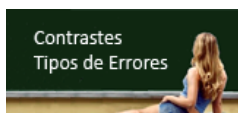
Se define  $\beta$  como la probabilidad de cometer un Error Tipo II:  
 $\beta = P[\text{ET II}] = P[\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}] \equiv P[\text{Aceptar } H_0 | H_1 \text{ es cierta}]$

Se define la **Potencia del contraste** como  $\text{Pot} = 1 - \beta$   
 $\text{Pot} = 1 - \beta = P[\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}] \equiv P[\text{Aceptar } H_1 | H_1 \text{ es cierta}]$

$\beta = 0,00554 \mapsto \text{Pot} = 1 - \beta = 1 - 0,00554 = 0,9945$

Pudiendo rellenar la tabla:

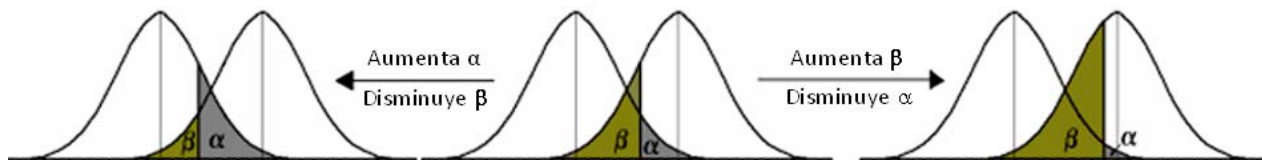
		Decisión	
		$H_0$	$H_1$
Realidad	Cierta $H_0$	$1 - \alpha = 0,95$	$\alpha = 0,05$ Error tipo I
	Cierta $H_1$	$\beta = 0,00554$ Error tipo II	$\text{Pot} = 1 - \beta = 0,9945$ Potencia contraste



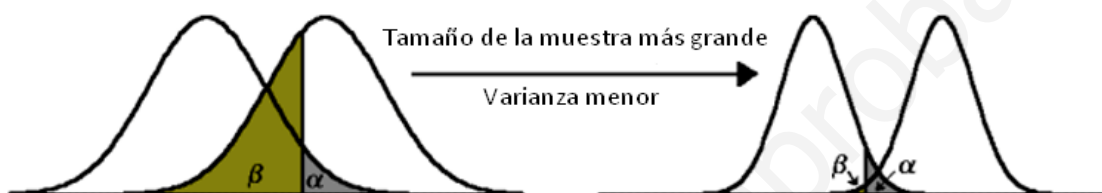
Decisión	$H_0$ verdadera	$H_0$ falsa
Se acepta $H_0$	Decisión correcta Probabilidad $1 - \alpha$	Error tipo II Probabilidad $\beta$
Se rechaza $H_0$	Error tipo I Probabilidad $\alpha$	Decisión correcta Probabilidad $1 - \beta$ Potencia contraste

Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son probabilidades condicionadas. Las probabilidades de ambos errores no pueden calcularse en sentido absoluto. Para calcular  $\alpha$  es necesario asumir que  $H_0$  es cierta y para calcular  $\beta$  se asume que  $H_1$  es cierta.

En cualquier prueba de hipótesis lo más conveniente será que ambos tipos de errores sean lo más pequeño posible, pero esto no es fácil de lograr, porque al intentar disminuir uno el otro aumenta proporcionalmente.



Al aumentar el tamaño  $n$  de la muestra es posible disminuir la probabilidad de cometer un Error Tipo II, manteniendo constante la probabilidad de cometer un Error Tipo I, en la figura adjunta se refleja como al aumentar el tamaño de la muestra se reduce la varianza de las distribuciones e igualmente el valor de  $\beta$ , mientras que el valor de  $\alpha$  se mantiene en 0,05.



POTENCIA  $Pot = 1 - P(ET II) = 1 - \beta$

- La potencia es mayor cuánto más alejada se encuentre la media verdadera  $\mu_1$  del valor supuesto  $\mu_0$ .
- Cuanto menor sea  $\alpha$  menor es la potencia, es decir, si se reduce la probabilidad de cometer un error Tipo I, se incrementa la probabilidad de un error Tipo II.
- Cuanto mayor es la varianza de la población menor es la potencia, cuando se tiene más variabilidad resulta más difícil detectar pequeñas desviaciones del valor real respecto del valor supuesto  $\mu_0$ .
- Cuanto mayor sea el tamaño muestral mayor es la potencia del contraste, esto es, cuanto más información se tiene sobre la población más sencillo resulta detectar pequeñas desviaciones del valor real respecto de la hipótesis nula.

45. Se sabe que la desviación típica de las notas de cierto examen es 2,4. Para una muestra de 36 estudiantes se obtuvo una nota media de 5,6. ¿Sirven estos datos para confirmar la hipótesis de que la nota media del examen fue 6, con un nivel de confianza del 95%?

**Solución:**

- $H_0: \mu = 6$      $H_1: \mu \neq 6$     *contraste bilateral*

$$\alpha = 0,05 \quad \mapsto \quad z_{0,025} = 1,96 \quad \mapsto \quad \text{Estadístico teórico: } z_{0,025} = 1,96$$

$$\text{Intervalo de confianza: } \left( \mu - z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \mapsto$$

$$\mapsto \left( 6 - 1,96 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{36}}, 6 + 1,96 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{36}} \right) = (5,22, 6,78)$$

$\bar{x} = 5,6 \in (5,22, 6,78) \mapsto$  Se acepta la hipótesis nula  $H_0$ , con un nivel de confianza del 95%

- Estadístico de contraste:  $z = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si: } z = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \quad \mapsto \quad -z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$

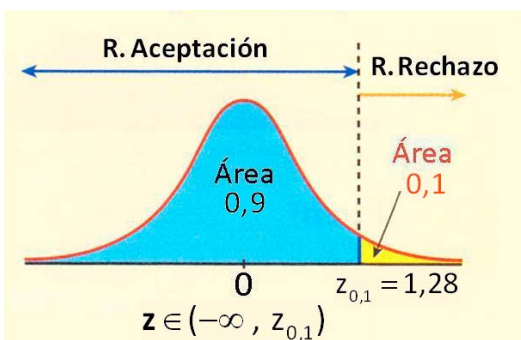
Es decir:  $\alpha = 0,05 \mapsto \alpha / 2 = 0,025 \mapsto z_{0,025} = 1,96 \mapsto$  Región aceptación:  $(-1,96, 1,96)$

$$-1,96 \leq \frac{5,6 - 6}{2,4 / \sqrt{36}} \leq 1,96 \quad \mapsto \quad -1,96 \leq -1 \leq 1,96$$

Se acepta que la nota media del examen fue de 6, con un nivel de confianza del 95%

46. Un informe indica que el precio medio del billete de avión entre Canarias y Madrid es, como máximo, de 120 euros con una desviación típica de 40 euros. Se toma una muestra de 100 viajeros y se obtiene que la media de los precios de sus billetes es de 128 euros. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación de 0,1, la afirmación de partida?

**Solución:**



- $H_0: \mu \leq 120$      $H_1: \mu > 120$     *contraste unilateral*

$$\alpha = 0,1 \quad \mapsto \quad z_{0,1} = 1,28$$

$$\text{Intervalo de confianza: } \left( -\infty, \mu + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \mapsto$$

$$\mapsto \left( -\infty, 120 + 1,28 \cdot \frac{40}{\sqrt{100}} \right) = (-\infty, 125,12)$$

$128 \notin (-\infty, 125,12) \mapsto$  No se acepta la hipótesis nula  $H_0$  con un nivel de confianza del 90%

- Estadístico de contraste:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$       Estadístico teórico:  $z_\alpha$

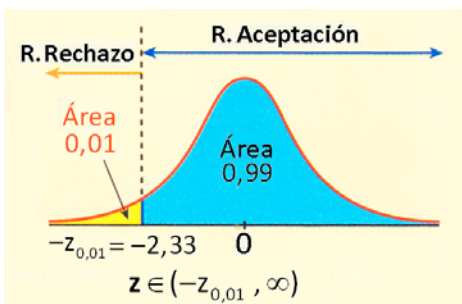
Se acepta  $H_0$  si:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_\alpha \quad \mapsto \quad z = \frac{128 - 120}{40 / \sqrt{100}} = 2 \not\leq 1,28 = z_\alpha$

Es decir:  $\alpha = 0,1 \quad \mapsto \quad z_{0,1} = 1,28 \quad \mapsto \quad$  Región aceptación:  $(-\infty, 1,28)$

Como  $2 \notin (-\infty, 1,28) \quad \mapsto \quad$  No se acepta la hipótesis nula  $H_0$  con un nivel de confianza del 90%

**47.** La duración de las bombillas de 100 W que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas de duración. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

**Solución:**



- $H_0: \mu \geq 800 \quad H_1: \mu < 800 \quad \text{contraste unilateral}$

$\alpha = 0,01 \quad \mapsto \quad z_{0,01} = 2,33$

Intervalo de confianza:  $\left( \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right) \quad \mapsto$   
 $\mapsto \left( 800 - 2,33 \cdot \frac{120}{\sqrt{50}}, \infty \right) = (760,46, \infty)$

$\bar{x} = 750 \notin (760,46, \infty) \quad \mapsto \quad$  No se acepta le informe con una fiabilidad del 99%

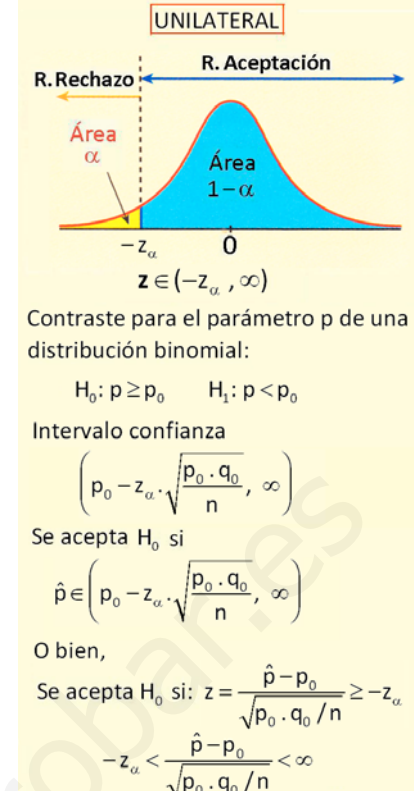
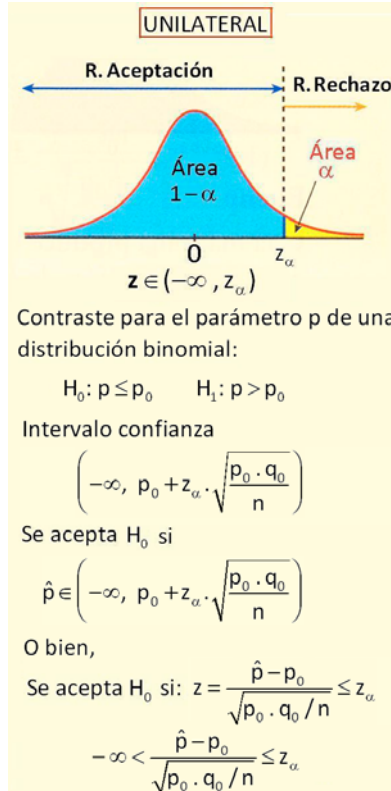
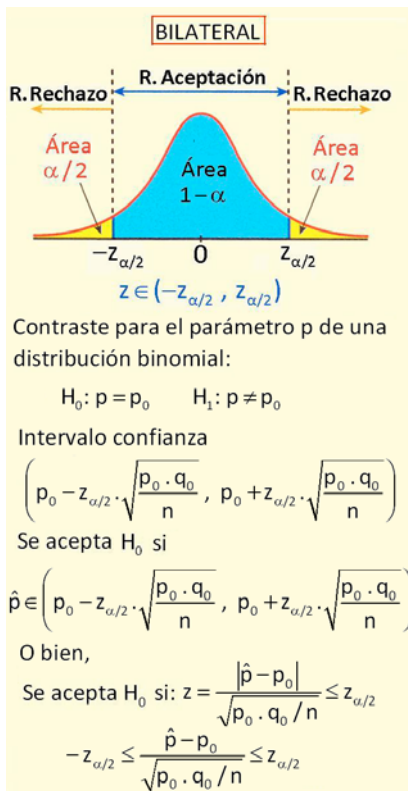
- Estadístico de contraste:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{750 - 800}{120 / \sqrt{50}} = -2,946$

Se acepta  $H_0$  si:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha \quad \mapsto \quad z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha \quad \mapsto \quad -2,946 \not\geq 2,33 = z_{0,01}$

Es decir,

$\alpha = 0,01 \quad \mapsto \quad z_{0,01} = 2,33 \quad \mapsto \quad -z_{0,01} = -2,33 \quad \mapsto \quad$  Región aceptación:  $(-2,33, \infty)$

Como  $-2,946 \notin (-2,33, \infty) \quad \mapsto \quad$  No se acepta la hipótesis nula  $H_0$  con un nivel de confianza del 99%



**48.** Un laboratorio desea estudiar el porcentaje de personas que tienen somnolencia al tomar un medicamento. Se ha realizado un estudio con una muestra de 120 individuos, y se ha obtenido que el 15% ha tenido dichos efectos secundarios. El laboratorio desea afirmar que solo un 10% de pacientes tiene dichos efectos. ¿Puede realizar esta afirmación con un nivel de confianza del 99%?

**Solución:**

- $H_0: p = 0,1 \quad H_1: p \neq 0,1$  *contraste bilateral*

$$1 - \alpha = 0,99 \quad \mapsto \quad \alpha = 0,01 \quad \mapsto \quad z_{0,01/2} = z_{0,005} = 2,58 \quad \text{estadístico teórico}$$

Intervalo de confianza:  $\left( p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}, p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}} \right) \mapsto$

$$\mapsto \left( 0,1 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{120}}, 0,1 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{120}} \right) = (0,03, 2,65)$$

$\hat{p} = 0,15 \in (0,03, 2,65) \mapsto$  Se acepta la hipótesis nula  $H_0$  (10% de los pacientes tendrá efectos secundarios) con un nivel de confianza del 99%

- Estadístico de contraste:  $z = \frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}}$

Se acepta  $H_0$  si:  $z = \frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}} \leq z_{\alpha/2} \mapsto -z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}} \leq z_{\alpha/2}$

$$\alpha = 0,01 \mapsto z_{0,01/2} = z_{0,005} = 2,58 \mapsto \text{región aceptación: } (-2,58, 2,58)$$

$$-2,58 \leq \frac{0,15 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{120}}} \leq 2,58 \mapsto -2,58 \leq 1,83 \leq 2,58$$

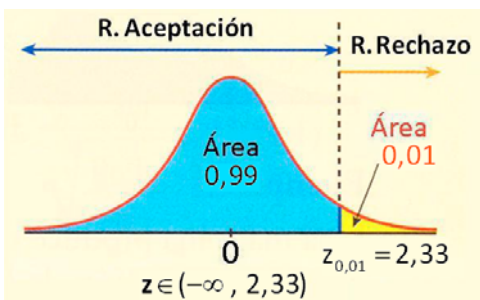
Se acepta que la hipótesis nula  $H_0$  con un nivel de confianza del 99%

**49.** Una marca de nueces afirma que, como máximo, el 6% de las nueces están vacías. Se eligieron 300 nueces al azar y se detectaron 21 vacías.

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca?

b) Si se mantiene el porcentaje muestral de nueces que están vacías y el nivel de confianza es del 95%, ¿qué tamaño muestral se necesitaría para estimar la proporción de nueces con un error menor del 1%?

**Solución:**



- $H_0: p \leq 0,06$      $H_1: p > 0,06$     *contraste unilateral*

$$\alpha = 0,01 \mapsto z_{0,01} = 2,33 \text{ estadístico teórico}$$

$$\text{Intervalo de confianza: } \left( -\infty, p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}} \right) \mapsto$$

$$\mapsto \left( -\infty, 0,06 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,06 \cdot 0,94}{300}} \right) = (-\infty, 0,092)$$

$$\hat{p} = \frac{21}{300} = 0,07 \in (-\infty, 0,092) \mapsto \text{Se acepta la hipótesis nula } H_0$$

con un nivel de confianza del 99%

- Estadístico de contraste:  $z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}}$

$$\text{Se acepta } H_0 \text{ si: } z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}} \leq z_\alpha \mapsto -\infty < \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0 / n}} < z_\alpha$$

$$\alpha = 0,01 \mapsto z_{0,01} = 2,33 \mapsto \text{región aceptación: } (-\infty, 2,33)$$

$$\frac{0,07 - 0,06}{\sqrt{\frac{0,06 \cdot 0,94}{300}}} = 0,729 \leq 2,33 \quad \mapsto \quad \text{Se acepta que la hipótesis nula } H_0 \text{ con un nivel de confianza del 99\%}$$

$$\text{b) } I_{1-\alpha}(p) = \left[ \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right] \quad 1 - \alpha = 0,95 \quad \mapsto \quad z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$\xi = 0,01 = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,07 \cdot 0,93}{n}} \quad \mapsto \quad \frac{0,01}{1,96} = \sqrt{\frac{0,07 \cdot 0,93}{n}} \quad \mapsto \quad 0,0051 = \sqrt{\frac{0,0651}{n}}$$

$$0,0051 = \sqrt{\frac{0,0651}{n}} \quad \mapsto \quad n = \frac{0,0651}{0,0051^2} \approx 2.500 \quad \mapsto \quad n \geq 2.501$$



www.yoquieroaprobar.es