

## Dominios y operaciones de funciones

1. Determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

- a)  $f : x \rightarrow x+4, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 5$       b)  $f : x \rightarrow x^2 + 7, x \in \mathbb{R}$       c)  $f : x \rightarrow 2x-3, x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 6$   
 d)  $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2+2}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 4$       e)  $f : x \rightarrow (x^2+3)^2, x \in \mathbb{R},$       f)  $f : x \rightarrow 5x^3-1, x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3$   
 g)  $f : x \rightarrow x^2-6x, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 6$       h)  $f : x \rightarrow \frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 9$       i)  $f : x \rightarrow 3\sqrt{x}-4, x \in \mathbb{R}, 0 < x < \infty$   
 j)  $f : x \rightarrow \sqrt{3x-2}, x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 9$       k)  $f : x \rightarrow x^4+x^2, x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2$       l)  $f : x \rightarrow \frac{1}{3+x^4}, x \in \mathbb{R}$

2. Determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$       b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 12-x & \text{si } 3 \leq x \leq 12 \end{cases}$   
 c)  $h(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ x^2+3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$       d)  $f(x) = \begin{cases} -3(x+2) & \text{si } -3 \leq x \leq -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3(x+2) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$   
 e)  $g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 7-x & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$       f)  $h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x+4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 16-(x-6)^2 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$

3. Sea la función  $f(x) = 5x-3, x \in \mathbb{R}$

- a) Hallar el valor de "x" para que  $f(x)=7$ .  
 b) Resolver la ecuación  $f(x)=x$ .

4. Sea la función  $f(x) = x^2 - 6x, x \in \mathbb{R}$

- a) Hallar el valor de "x" para que  $f(x)=16$ .  
 b) Resolver la ecuación  $f(x)=5-2x$ .

5. Sea la función  $f(x) = 2 + \frac{5}{x}$  con  $x \neq 0$

- a) Evaluar  $f(-2)$ .  
 b) Resolver la ecuación  $f(x)=2x+7$ .

6. Sean las funciones:  $f(x) = \frac{x}{x-2}$  para  $x \neq 2$ , y  $g(x) = \frac{2}{x-3}$  para  $x \neq 3$

- a) Evaluar  $f(6)$ .  
 b) Resolver  $g(x)=6$ .  
 c) Resolver  $f(x)=g(x)$ .

7. Calcular el dominio máximo de las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 1$       b)  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$       c)  $f(x) = \frac{1}{x}$       d)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$   
 e)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$       f)  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x-6}$       g)  $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$       h)  $f(x) = \frac{2x}{2x^2+2x+1}$   
 i)  $f(x) = \frac{4x-1}{x^3+1}$       j)  $f(x) = \frac{x+3}{x^3-8x^2+25x}$       k)  $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2-2}$       l)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+4}$   
 m)  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$       n)  $f(x) = \sqrt{1-\frac{16}{x^2}}$       o)  $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$       p)  $f(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$   
 q)  $f(x) = \sqrt{-x^2+8x-7}$       r)  $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$       s)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}-2x$

t)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x - 6}$     u)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$     v)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2 - 2x - 3}}$     w)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$

x)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$     y)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$     z)  $f(x) = |x - 1|$

8. Si  $y_1 = \frac{x}{2x-1}$ ,  $y_2 = \frac{3x-2}{x+1}$  calcular  $y_1 + y_2$ ,  $y_1 - y_2$  y sus dominios.

9. Sumar las funciones:  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$

10. Multiplicar las funciones:  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ ,  $g(x) = x^2 - 6$ . Determinar el dominio de  $f \cdot g$

11. Multiplicar las funciones:  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ . Determinar el dominio de  $f \cdot g$

12. Si  $h(x) = x^2 - 8x + 6$ , hallar otras dos funciones  $f$  y  $g$ , tales que  $h = f \cdot g$

13. Hallar el dominio de la función  $\frac{1}{f}$  si  $f(x) = \begin{cases} 6 & x < 1 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$

14. Si  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g(x) = 6x - 1$ , calcular  $\frac{f}{g}$  y los dominios de  $f$ ,  $g$  y  $\frac{f}{g}$ .

15. Sean  $f, g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Comprobar la propiedad  $a \cdot (f + g) = a \cdot f + a \cdot g$  tomando  $a = 3$

16. Sean las funciones  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2$  y  $h(x) = \frac{1}{x}$  realizar las siguientes evaluaciones:

- a)  $f(3)$     b)  $g(2)$     c)  $(h \circ g)(2)$     d)  $(f \circ g)(-3)$     e)  $(g \circ f)(1)$     f)  $(g \circ h)(-2)$   
 g)  $(h \circ f)(4)$     h)  $(f \circ f)(5)$     i)  $(g \circ g)(-3)$     j)  $(h \circ h)(12)$     k)  $(f \circ g \circ h)(2)$     l)  $(h \circ f \circ g)(4)$

17. Sean  $f(x) = 3x - 1$ ,  $g(x) = x^2$  y  $h(x) = 2/x$ , escribir y simplificar las expresiones:

- a)  $(f \circ g)(x)$     b)  $(g \circ f)(x)$     c)  $(f \circ h)(x)$     d)  $(h \circ g)(x)$     e)  $(g \circ g)(x)$     f)  $(f \circ f)(x)$

18. Sean  $f(x) = x^2 + 3$  y  $g(x) = x + 5$  comprobar que la composición de funciones no es conmutativo. Y resolver  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

19. Sean  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = 5x - 3$ . Hallar a)  $(g \circ f)(3)$     b)  $(g \circ f)(-1)$     c)  $(f \circ g)(2)$

20. Hallar  $g \circ f$ ,  $Dom(g \circ f)$ ,  $f \circ g$ ,  $Dom(f \circ g)$  siendo  $f$  y  $g$  las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = 3x^2 - 1$ ,  $g(x) = 4x$     b)  $f(x) = 5x$ ,  $g(x) = \frac{2}{6x-1}$     c)  $f(x) = x^4 + 1$ ,  $g(x) = x^2$     d)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

21. La función "h" y "k" están definidas por  $h : x \rightarrow 3/x$      $k : x \rightarrow x + 5$

- a) Resolver  $(h \circ k)(x) = 1$   
 b) Resolver  $(k \circ h)(x) = 6$

22. Sean las funciones:  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2x + 5$   $x \in \mathbb{R}$  resolver las ecuaciones:

- a)  $(f \circ g)(x) = 9$     b)  $(g \circ g)(x) = 21$

23. Calcular el dominio y la imagen de  $(g \circ f)(x)$ , siendo  $f(x) = x^2$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $1 \leq x \leq 5$  y  $g(x) = 2x + 5$   $x \in \mathfrak{R}$
24. Sean las funciones “p” y “q” definidas como:  $p: x \rightarrow 3x^2 + 1$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ ,  $0 \leq x \leq 2$        $q: x \rightarrow x - 2$ ,  $x \in \mathfrak{R}$  calcular la imagen de la composición  $(q \circ p)(x)$ .
25. Sean las funciones  $f(x) = x^2 + 4$  y  $g(x) = \frac{1}{x-3}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \geq 4$ , calcular  $Dom(g \circ f)(x)$  y  $Im(g \circ f)(x)$
26. Sean las funciones  $f(x) = \sqrt{x+1}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 0$  y  $g(x) = x^2$   $x \in \mathfrak{R}$  hallar:
- a)  $Dom(f \circ g)(x)$  y  $Im(g \circ f)(x)$       b)  $Dom(g \circ f)(x)$  y  $Im(g \circ f)(x)$
27. Tomamos las funciones  $h(x) = 3x + 5$   $x \in \mathfrak{R}$ , y  $k(x) = 2 - x$   $x \in \mathfrak{R}$  resolver la ecuación  $(h \circ h)(x) = (k \circ k)(x)$ .
28. Resolver la ecuación  $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 0$  siendo  $f(x) = x + 1$   $x \in \mathfrak{R}$ , y  $g(x) = x^2 - 3$   $x \in \mathfrak{R}$
29. Calcular las inversas de las siguientes funciones:
- a)  $f(x) = 3x + 2$       b)  $f(x) = 5x - 1$       c)  $f(x) = 4 - 3x$
- d)  $f(x) = 2/x$  para  $x \neq 0$       e)  $f(x) = \frac{3}{x-1}$  para  $x \neq 1$       f)  $f(x) = \frac{5}{2-3x}$  para  $x \neq 2/3$
- g)  $f(x) = \frac{x}{x+21}$  para  $x \neq -2$       h)  $f(x) = \frac{2x}{5-x}$  para  $x \neq 5$       i)  $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$  para  $x \neq -1/2$
30. Calcular la inversa de las siguientes funciones en sus respectivos dominios y determinar donde están definidas:
- a)  $f(x) = x^2$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 2$       b)  $f(x) = \frac{1}{2+x}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 0$
- c)  $f(x) = \sqrt{x-2}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 3$       d)  $f(x) = 3x^2 - 1$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $1 < x < 4$
- e)  $f(x) = \sqrt{2x+3}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \geq 11$       f)  $f(x) = \frac{1}{x} - 3$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $2 < x < 5$
- g)  $f(x) = (x+2)^2 + 3$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \geq -2$       h)  $f(x) = x^3 + 1$   $x \in \mathfrak{R}$
31. Sea la función  $f(x) = 3x - 4$ , resolver  $f(x) = f^{-1}(x)$ .
32. Sea la función  $f(x) = 10 - 2x$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \geq 0$ , resolver  $f(x) = f^{-1}(x)$ .
33. Sea la función  $f(x) = x^2 - 6$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 0$ , resolver  $f(x) = f^{-1}(x)$ .
34. Sea la función  $f: x \rightarrow (x-2)^2$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \geq 2$ , resolver  $f(x) = f^{-1}(x)$ .
35. Sean las funciones  $f(x) = 2x - 5$   $x \in \mathfrak{R}$ , y  $g(x) = 7 - 4x$   $x \in \mathfrak{R}$  resolver:
- a)  $f(x) = g(x)$       b)  $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$
36. Sea la función  $h(x) = \frac{4}{x+3}$   $x \in \mathfrak{R}^+$
- a) Dibujar y calcular la imagen de  $h(x)$ .
- b) Hallar  $h^{-1}$ .
- c) Resolver  $h(x) = h^{-1}(x)$
37. Considerando las funciones  $f(x) = 3x + 1$   $x \in \mathfrak{R}$  y  $g(x) = x - 2$   $x \in \mathfrak{R}$  comprobar que  $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
38. Sean las funciones  $f(x) = 2x + 3$   $x \in \mathfrak{R}$  y  $g(x) = \frac{1}{x-1}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \neq 1$  resolver la ecuación  $f^{-1}(x) = (g \circ f)(x) - 1$ .
39. Resolver  $3g^{-1}(x) = 10g(h(x)) + 9$  con  $g(x) = \frac{5}{x-3}$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x \neq 3$  y  $h(x) = x^2 + 4$   $x \in \mathfrak{R}$ ,  $x > 0$

Soluciones:

- 1) a)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = [4,9]$ , b)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = [7, \infty)$ , c) , d)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = [1/18, 1/3]$ , e)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = [9, \infty)$  , f)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = (4, 134)$  , g)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = [-9, 0]$ , h)  $Domf = \mathbb{R} - \{-1\}$ ;  $Im f = (1/10, 1/2)$ , i)  $Domf = \mathbb{R}^+$ ;  $Im f = (-4, \infty)$  , j)  $Domf = [2/3, \infty)$ ;  $Im f = [2, 5]$ , k)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = (0, 20]$ , l)  $Domf = \mathbb{R}$ ;  $Im f = (0, 1/3]$ .
- 2) a)  $Domf = [0, 6]$ ;  $Im f = [4, 36]$ , b)  $Domg = [0, 12]$ ;  $Im g = [0, 9]$ , c)  $Domh = [-3, 2]$ ;  $Im h = [0, 7]$ , d)  $Domf = [-3, 3]$ ;  $Im f = [0, 4]$ , e)  $Domg = [-1, 6]$ ;  $Im g = [1, 4]$ , f)  $Domh = [0, 10]$ ;  $Im h = [0, 16]$ .
- 3) a) 2, b) 3/4; 4) a) -2, 8, b) -1, 5; 5) a) -1/2, b) -3.27, 0.766; 6) a) 3/2, b) 10/3, c) 1, 4 7) a)  $\mathbb{R}$ , b)  $\mathbb{R} - \{-1\}$ , c)  $\mathbb{R}^*$ , d)  $\mathbb{R} - \{1\}$ , e)  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$ , f)  $\mathbb{R} - \{2, -3\}$ , g)  $\mathbb{R}$ , h)  $\mathbb{R}$ , i)  $\mathbb{R} - \{-1\}$ , j)  $\mathbb{R}^*$ , k)  $\mathbb{R} - \{1\}$ , l)  $\mathbb{R} - \{1, -4\}$ , m)  $\mathbb{R} - (-3, 3)$ , n)  $\mathbb{R} - (-4, 4)$ , o)  $[-3/2, 3/2]$ , p)  $[-2, 1]$ , q)  $[1, 7]$ , r)  $[1, 2] \cup [3, +\infty)$ , s)  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , t)  $(-\infty, 1] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$ , u)  $[1, 2)$ , v)  $(-1, 2] \cup (3, +\infty)$ , w)  $(1, 2)$ , x)  $\mathbb{R}^*$ , y)  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ , z)  $\mathbb{R}$
- 16) a) 7; b) 4; c) 1/4; d) 19; e) 1; f) 1/4; g) 1/9; h) 23; i) 81; j) 12; k) 3/2; l) 1/33; 17) a)  $3x^2 - 1$ ; b)  $(3x - 1)^2$ , c)  $(6/x) - 1$ ; d)  $2/x^2$ , e)  $x^4$ , f)  $9x - 4$ ; 18)  $(f \circ g)(x) = x^2 + 10x + 28$ ;  $(g \circ f)(x) = x^2 + 8$ ;  $x = -2$ ; 21) a)  $3/(x+5)$ , 2; b)  $(3/x) + 5$ , 3 22) a) -4, -1; b) 3/2 23)  $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5$ ,  $7 \leq (g \circ f)(x) \leq 55$  24)  $(q \circ p)(x) = 9x^4 + 6x^2 - 1$ ;  $0 \leq (q \circ p)(x) \leq 167$ ; 25)  $(g \circ f)(x) = 1/(x^2 + 1)$ ;  $0 \leq (g \circ f)(x) \leq 1/17$ , 26)  $\sqrt{x^2 + 1}$ ;  $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$ ,  $(g \circ f)(x) > 1$ , 27) -5/2, 28) -2, 1; 29) a)  $f^{-1}(x) = (x - 2)/3$ ; b)  $f^{-1}(x) = (1 + x)/5$ ; c)  $f^{-1}(x) = (4 - x)/3$ ; d)  $f^{-1}(x) = 2/x$   $x \neq 0$ ; e)  $f^{-1}(x) = (3 + x)/x$   $x \neq 0$ ; f)  $f^{-1}(x) = (2x - 5)/3x$   $x \neq 0$ ; g)  $f^{-1}(x) = 2x/(1 - x)$   $x \neq 1$ ; h)  $f^{-1}(x) = 5x/2 + x$   $x \neq -2$ , i)  $f^{-1}(x) = x/(3 - 2x)$   $x \neq 3/2$

