

## TRIGONOMETRÍA (Resumen)

- Definiciones en triángulos rectángulos**

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

- Razones de 30°, 60° y 45°**

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

- Definiciones generales (válidas para cualquier ángulo de cualquier cuadrante)**

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}$$

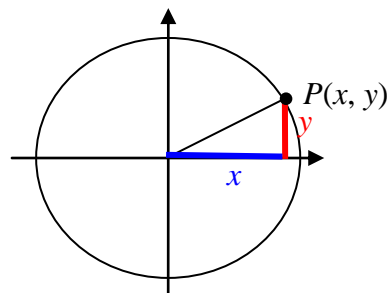
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{r}$$

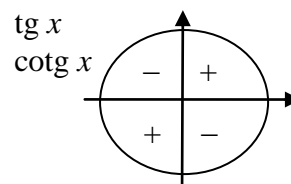
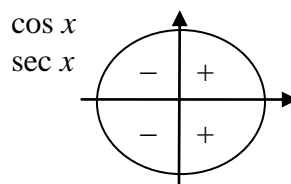
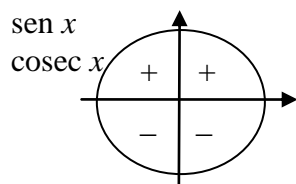
$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y}$$

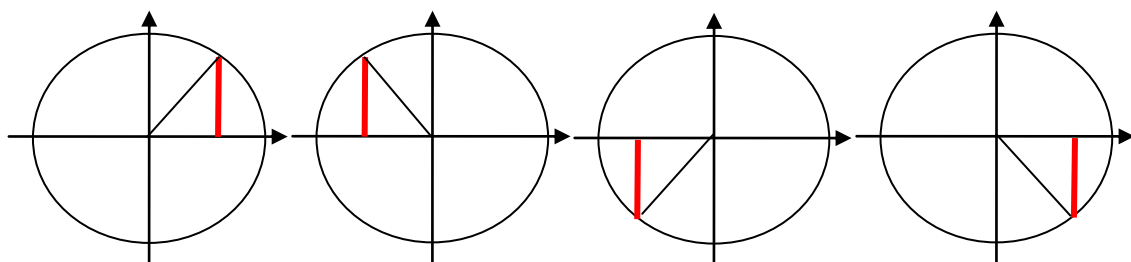


- Signos de las razones según los cuadrantes**

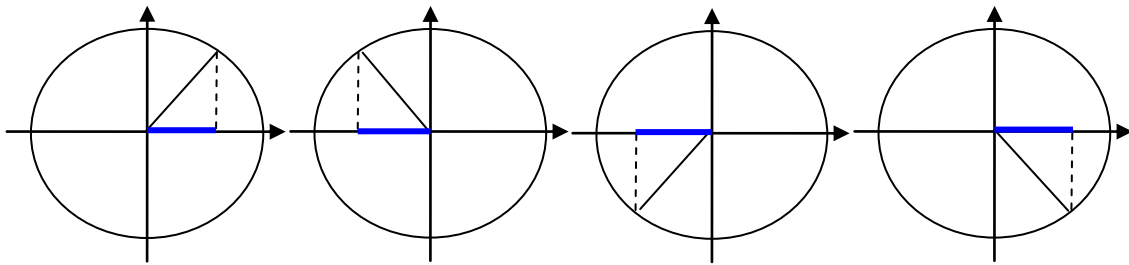


- Las razones en la circunferencia trigonométrica (radio = 1)**

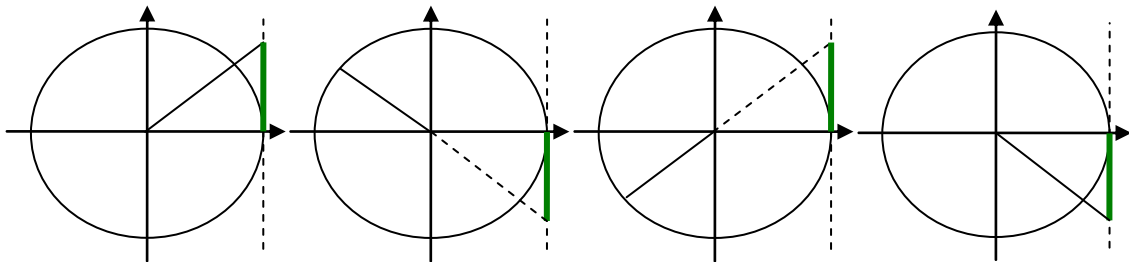
sen x



**cos x**



**tg x**



- **Recorrido**

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad -1 \leq \operatorname{cos} x \leq 1 \quad -\infty < \operatorname{tg} x < +\infty, \quad \forall x$$

- **Situar un ángulo en la circunferencia**

- Si el ángulo es mayor de  $360^\circ$ , lo dividimos entre 360 (sin eliminar ceros en dividiendo y divisor, si se pudiera) y coincide con la posición del resto de la división sobre la circunferencia. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2100 \quad | \quad 360 \\ 300 \quad 5 \end{array} \quad \Rightarrow 2100 = 5 \cdot 360 + 300 \text{ (5 vueltas completas + } 300^\circ) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2100^\circ \text{ y } 300^\circ \text{ coinciden sobre la circunferencia.}$$

- Si el ángulo es negativo y menor de  $-360^\circ$ , dividimos entre 360 su valor absoluto, como antes. El ángulo coincide con el resto negativo. Sumándole  $360^\circ$  se convierte en un ángulo entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . Ejemplo: Tomemos  $-2100^\circ$ ; se tiene:

$$\begin{array}{r} 2100 \quad | \quad 360 \\ 300 \quad 5 \end{array} \quad \Rightarrow -2100^\circ \text{ y } -300^\circ \text{ coinciden sobre la circunferencia.} \\ \Rightarrow 2100 = 5 \cdot 360 + 300 \Rightarrow -2100 = 5 \cdot (-360) - 300 \Rightarrow \\ \text{Pero } -300^\circ \text{ coincide sobre la circunferencia con } -300^\circ + \\ 360^\circ = 60^\circ. \text{ Por tanto, } -2100^\circ \text{ coincide con } 60^\circ.$$

• **Fórmulas fundamentales**

1)  $\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}$

2)  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

3)  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sen \alpha}$

4)  $\sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

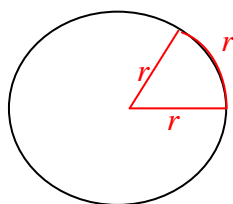
5)  $\tg \alpha = \frac{\sen \alpha}{\cos \alpha}$

6)  $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha}$

7)  $1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

8)  $1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sen^2 \alpha}$

• **El radián**



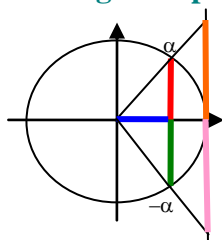
El *radián* es una medida de ángulos. Un ángulo mide 1 radián (y se denota como 1 rad) si delimita un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el radio.

Como la longitud de la circunferencia es  $2\pi r$ , dicha longitud (el arco que delimita) es  $2\pi$  veces mayor que el radio. Por tanto, un ángulo de  $360^\circ$  es  $2\pi$  veces mayor que aquél que mide 1 rad. Luego  $360^\circ$  equivale a  $2\pi$  rad. Y por ello,  $180^\circ$  equivale a  $\pi$  rad. Así, una regla de 3 permite pasar de grados a radianes, o al revés:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{\text{Ángulo en grados}}{\text{Ángulo en rad}}$$

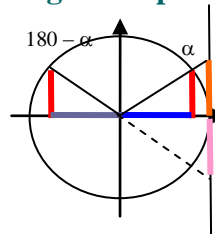
• **Relaciones entre razones de distintos ángulos**

**Ángulos opuestos:  $\alpha$  y  $-\alpha$**



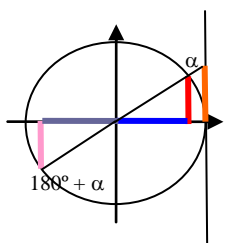
$\sen(-\alpha) = -\sen \alpha$   
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$   
 $\tg(-\alpha) = -\tg \alpha$

**Ángulos suplementarios:  $\alpha$  y  $180^\circ - \alpha$**



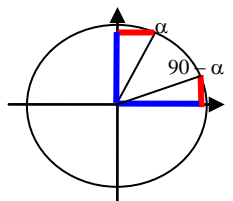
$\sen(180^\circ - \alpha) = \sen \alpha$   
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$   
 $\tg(180^\circ - \alpha) = -\tg \alpha$

**Áng. que difieren en  $180^\circ$ :  $\alpha$  y  $180^\circ + \alpha$**



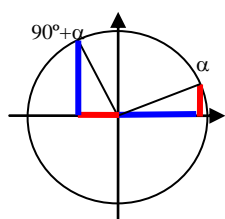
$\sen(180^\circ + \alpha) = -\sen \alpha$   
 $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$   
 $\tg(180^\circ + \alpha) = \tg \alpha$

**Ángulos complementarios:  $\alpha$  y  $90^\circ - \alpha$**



$\sen(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$   
 $\cos(90^\circ - \alpha) = \sen \alpha$   
 $\tg(90^\circ - \alpha) = \cotg \alpha$

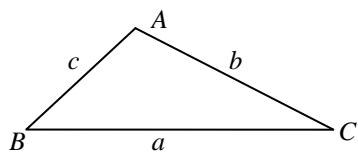
**Áng. que difieren en  $90^\circ$ :  $\alpha$  y  $\alpha + 90^\circ$**



$\sen(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$   
 $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sen \alpha$   
 $\tg(90^\circ + \alpha) = -\cotg \alpha$

## • Resolución de triángulos no rectángulos

### Teorema de los senos

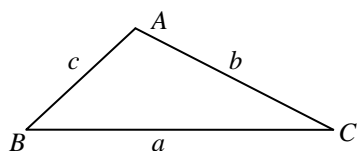


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Observaciones relativas al Teorema de los senos:

- 1) Sirve para resolver un triángulo conocidos dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- 2) Cuando se calcula un ángulo hay, en principio, dos soluciones:  $\alpha$  y  $180^\circ - \alpha$ . Hay que comprobar si ambas son válidas: La suma de los tres ángulos no puede superar  $180^\circ$ , y un triángulo tiene, a lo sumo, un solo ángulo obtuso.
- 3) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

### Teorema del coseno



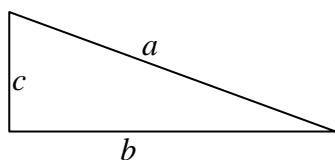
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

Observaciones relativas al Teorema del coseno:

- 1) Sirve para resolver un triángulo conocidos los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- 2) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

## • Otras fórmulas útiles

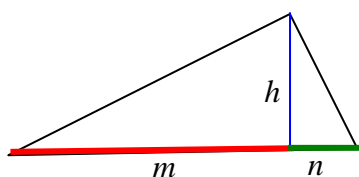
### Teorema de Pitágoras



Sólo en triángulos rectángulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (a \text{ es la hipotenusa})$$

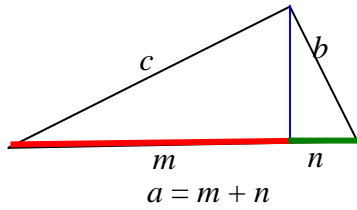
### Teorema de la altura



Sólo en triángulos rectángulos:

$$h^2 = m \cdot n \quad (a = m + n \text{ es la hipotenusa})$$

### Teorema del cateto



Sólo en triángulos rectángulos:  
 $c^2 = m \cdot a$  (a es la hipotenusa)  
 $b^2 = n \cdot a$

$$a = m + n$$

### Fórmula de Herón

Calcula el área de un triángulo cualquiera conocidos sus tres lados. Si llamamos  $p$  al *semiperímetro* del triángulo, esto es:  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , se tiene:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

### Área de un triángulo

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

### Longitud de la circunferencia

$$l = 2\pi r$$

### Área del círculo

$$S = \pi r^2$$