OPERACIONES CON RADICALES

RAÍCES Y RADICALES

La **raíz *n*-ésima** de un número a, representada por $\sqrt[n]{a}$, es una operación sobre a que da como resultado un número x tal que $x^n = a$. Si n es par, hay dos resultados posibles: positivo y negativo: $\pm x$, requiriéndose, además, que $a \geq 0$. Si n es impar, sólo hay un posible resultado.
A n se le llama *índice* de la raíz, y al valor a, *radicando*. n es un número *natural* distinto de 0 ($n \in \mathbb{N}^*$). Cuando $n = 1$, desaparece la operación raíz, quedándonos únicamente con el radicando.
Pero con operaciones combinadas lo que empleamos *siempre* son *radicales*. Un **radical** es una expresión del tipo $b \cdot \sqrt[n]{a}$, donde a y b son números reales. Y la raíz tiene únicamente el signo que se indique. Así: $\sqrt{4} = +\sqrt{4} = 2$, así como $-\sqrt{4} = -2$. Si en algún momento nos queremos referir a una raíz de índice par con sus dos signos, lo escribiremos expresamente: $\pm\sqrt{4}$.

OPERACIONES CON RADICALES

Todas las operaciones que expresamos a continuación son consecuencia de las fórmulas fundamentales de radicales y de potencias, si bien nosotros expresamos ya el método resultante (no se está dando la demostración). Para todas ellas se requiere que en los radicales sólo haya **productos o cocientes**: si hubiera sumandos y no se pueden transformar en productos (sacando factor común), no podríamos hacer nada.

1. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Procedimiento: Hallamos el mcd *del índice y de todos los exponentes del radicando*. Dividimos cada uno de ellos y el índice entre el mcd.

Ejemplo: $\sqrt[12]{\dfrac{16a^8}{b^4}}$ Sólo hay productos y cocientes, luego podemos operar. 16 está elevado a 1, pero podemos ponerlo en forma de potencia: 2^4 (normalmente buscamos que la base sea un número primo). Luego:
$\sqrt[12]{\dfrac{16a^8}{b^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^4a^8}{b^4}} =$ (mcd(12,4,8,4)=4 $\Rightarrow$ dividimos el índice y cada exponente entre 4) $= \sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{b}}$

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt[6]{16a^4}$; b) $\sqrt[15]{2a^5}$; c) $\sqrt[4]{3^2+a^2}$; d) $\sqrt[8]{\dfrac{16a^6}{b^2}}$

2. AMPLIFICAR RADICALES

Procedimiento: Inverso al anterior; se multiplican el índice y cada uno de los exponentes por el mismo número.

Ejemplo: $\sqrt{\dfrac{3x^3}{y}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3x^9}{y^3}}$ (hemos multiplicado por 3 índice y exponentes)

Todos los ejemplos de la operación anterior, leídos al revés (de derecha a izquierda, es decir, del resultado final al comienzo) nos sirven de ejemplo de esta operación.

Ejercicios propuestos:

a) Poner con índice 8: $\sqrt{\dfrac{3x^3}{y}}$

3. PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES

Procedimiento: Se escriben todos los radicales que intervienen con el mismo índice. Si no lo tuvieran, se *amplifican*, según lo expuesto antes, de forma que todos tengan como índice el mcm de los índices iniciales.

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}\sqrt{a}}{\sqrt[4]{2^3a}}$ = (mcm(3,2,4)=12 $\Rightarrow$ amplificamos todos los radicales a índice 12)

$$=\frac{\sqrt[12]{2^4a^8}\sqrt[12]{a^6}}{\sqrt[12]{2^9a^3}}=\sqrt[12]{\frac{2^4a^8a^6}{2^9a^3}}=\sqrt[12]{\frac{a^{11}}{2^5}}$$

Ejercicios propuestos:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}$; b) $\dfrac{\sqrt[6]{2^3a^4}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{2a^3}}$

4. EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL RADICAL

Procedimiento: Sólo se pueden extraer factores o divisores, que tengan como exponente un valor mayor o igual que el índice de la raíz. (En el ejemplo que sigue, el 2 no se puede extraer, pero sí *a*, elevado a 9 que es mayor que 3, y *b*, elevado a 3 que es igual al índice). Para la extracción de un factor de índice mayor o igual que el índice:

a) Si el exponente es múltiplo del índice de la raíz, el factor sale de la raíz elevado al exponente que tenía dividido entre el índice de la raíz. (En el ejemplo, el exponente de *b* es 3, múltiplo del índice de la raíz, también 3. Sale *b* elevado a 3 entre 3, o sea, 1, y se mantiene en el denominador.)

b) En caso contrario (como le sucede al *a* en el ejemplo), se separa dicho factor en producto de la misma base (*a* en el ejemplo) elevada al múltiplo del índice de la raíz más próximo, sin sobrepasarlo, al exponente que tenía dicho factor (en el ejemplo, 9 es el múltiplo de 3 más próximo a 10 sin sobrepasarlo) multiplicado por la misma base elevada a lo que falte hasta el exponente que tenía (En el ejemplo, lo que falta desde 9 hasta 10 es 1. Por eso separamos $a^{10}=a^9\cdot a$.) Al factor que queda con exponente múltiplo del índice, se le aplica el proceso explicado en el apartado anterior. El otro factor, permanece dentro de la raíz.

Ejemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{2a^{10}}{b^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2a^9a}{b^3}}=\dfrac{a^3}{b}\sqrt[3]{2a}$

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{16+4a^2}$; c) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^{15}}{b^8}}$; d) $4\sqrt{12}-3\sqrt{48}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}$;

e) $\sqrt{8}-\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{32}$

5. INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN EL RADICAL

Procedimiento: Se multiplican los exponentes por el índice de la raíz.

Ejemplo: $2a^5\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3a^{15}a} = \sqrt[3]{2^3a^{16}}$

Ejercicios propuestos:

a) $2a^3b\sqrt[3]{2}$

6. RAÍZ DE UNA RAÍZ

Procedimiento: Si las dos raíces, una conteniendo a la otra, están consecutivas, sin ningún número que las separe, se multiplican los índices.

Ejemplo: $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ = (Hay un factor a que separa los radicales: lo introducimos dentro de la raíz interior, la de índice 2) $=\sqrt[3]{\sqrt{a^2a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3}$ = (siempre hay que simplificar y racionalizar denominadores, que lo veremos más adelante)$=\sqrt{a}$

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$; b) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

7. RACIONALIZAR DENOMINADORES

Consiste en cambiar la expresión para que no aparezcan raíces en el denominador. El procedimiento es diferente según los casos:

Procedimiento caso 1: No hay sumas en el denominador. Multiplicamos numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador y con factores elevados a exponentes tales que al sumar con los exponentes originales resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo: $\frac{a}{\sqrt[4]{2a^3}}$ = (2^1 debemos multiplicarlo por 2^3 para que de un exponente múltiplo del indice de la raíz: 2^4. a^3 precisa ser multiplicado por a^1) $= \frac{a}{\sqrt[4]{2a^3}}\frac{\sqrt[4]{2^3a}}{\sqrt[4]{2^3a}} =$

$$= \frac{a\sqrt[4]{2^3a}}{\sqrt[4]{2a^32^3a}} = \frac{a\sqrt[4]{2^3a}}{\sqrt[4]{2^4a^4}} = \frac{a\sqrt[4]{2^3a}}{2a} = \frac{\sqrt[4]{2^3a}}{2}$$

Ejercicios propuestos:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}$; c) $\frac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}$; d) $\frac{2a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{ab^2}}$

Procedimiento caso 2: Hay una suma o diferencia en el denominador y las raíces que intervienen en el denominador son raíces cuadradas. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador (si el denominador es una suma, por la diferencia y si es una diferencia, por la suma).

Ejemplo: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ = (el conjugado de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ es $\sqrt{2}-\sqrt{5}$) $= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{2}\sqrt{5}}{2-5} = \dfrac{2+5-2\sqrt{10}}{-3} = -\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} =$
$\dfrac{-7+2\sqrt{10}}{3} = \dfrac{2\sqrt{10}-7}{3}$

Ejercicios propuestos:

e) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; f) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

8. POTENCIA FRACCIONARIA

Procedimiento: Aplicar la definición $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ a cada factor o divisor del radical.

Ejemplos: $5^{-1/2} = \dfrac{1}{5^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; Poner con exp. fracc: $\sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{b}} = \left(\dfrac{2a^2}{b}\right)^{1/3} = \dfrac{2^{1/3}a^{2/3}}{b^{1/3}}$

Ejercicios propuestos:

a) Poner sin exponente fraccionario ni negativo: $2(3a^2b^{1/2})^{1/3}$

b) Poner con exponente fraccionario: $\sqrt[3]{2^2a^2}$

9. SIMPLIFICACIÓN DE LA EXPRESIÓN FINAL

Hay que:

- Simplificar las raíces, conforme a lo dicho en el apartado 1
- Extraer factores de las raíces
- Que las raíces no contengan denominadores y que los denominadores estén racionalizados.
- Evitar paréntesis.
- Los exponentes deben ser positivos.

10. SUMA Y RESTA DE RADICALES

- *Radicales semejantes* son los que, después de simplificados, tienen el mismo índice y radicando, pudiendo variar únicamente en el coeficiente. Ej: son semejantes los cuatro radicales siguientes: $\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot5^2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot3^2} = 3\sqrt{2}$.
- Para poder sumar o restar radicales, tienen que ser semejantes. El procedimiento consiste en sumar o restar los coeficientes, dejando la misma raíz.

  Ejemplos:

  1) $\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{300} = \sqrt{2^2\cdot3} - \sqrt{3\cdot5^2} + \sqrt{3\cdot10^2}$ = (10 no es un número primo, pero como 300 = 3·100 = $3\cdot10^2$ es una operación que puede hacerse fácilmente, de memoria, y nos es útil porque como trabajamos con raíces de índice 2, un número al cuadrado puede extraerse de la raíz) = $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$ = (2 – 5 + 10) $\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$. La justificación de sumar y restar los coeficientes la tenemos en que extraemos la raíz como factor común de los sumandos.

  2) $\sqrt{5}+2\sqrt{45}+2\sqrt{27}-\sqrt{20} = \sqrt{5} + 2\sqrt{3^2\cdot5} + 2\sqrt{3^2\cdot3} - \sqrt{2^2\cdot5} = \sqrt{5} + 2\cdot3\sqrt{5} + 2\cdot3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} = (1+6-2)\sqrt{5} + 6\sqrt{3} = 5\sqrt{5} + 6\sqrt{3}$. En este caso, no podemos hacer más, puesto que hemos terminado con dos radicales no semejantes.

Ejercicios propuestos:

a) $\sqrt{50}-5\sqrt{18}+\sqrt{98}$

b) $2\sqrt{45}+\sqrt{63}-3\sqrt{20}$

Soluciones a los ejercicios:

1a) $\sqrt[6]{16a^4}=\sqrt[6]{2^4a^4}=\sqrt[3]{2^2a^2}$ (dividiendo índice y exponentes entre 2)

1b) $\sqrt[15]{2a^5}$; mcd (15,1,5)=1 $\Rightarrow$ no se puede simplificar

1c) $\sqrt[4]{3^2+a^2}$; no podemos transformar el radicando en productos $\Rightarrow$ no se puede simplificar.

1d) $\sqrt[8]{\dfrac{16a^6}{b^2}}=\sqrt[8]{\dfrac{2^4a^6}{b^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{2^2a^3}{b}}$ (dividiendo índice y exponentes entre 2)

2a) $\sqrt{\dfrac{3x^3}{y}}=\sqrt[2\cdot4]{\dfrac{3^{1\cdot4}x^{3\cdot4}}{y^{1\cdot4}}}=\sqrt[8]{\dfrac{3^4x^{12}}{y^4}}$

3a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^4}{a^3}}=\sqrt[6]{a}$

3b) $\dfrac{\sqrt[6]{2^3a^4}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{2a^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^6a^8}}{\sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{2^3a^9}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^6a^8}{a^6\,2^3a^9}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^3}{a^7}}$

4a) $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\sqrt{3^23}=3\sqrt{3}$

4b) $\sqrt{16+4a^2}$ = (hay que transformar en productos, para poder hacer algo; sacamos factor común) = $\sqrt{4(4+a^2)}=\sqrt{2^2(4+a^2)}=2\sqrt{4+a^2}$

4c) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^{15}}{b^8}}=\sqrt[4]{\dfrac{2^4a^{12}a^3}{b^8}}=\dfrac{2a^3}{b^2}\sqrt[4]{a^3}$

4d) $4\sqrt{12}-3\sqrt{48}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}=4\sqrt{2^23}-3\sqrt{2^43}+2\sqrt{3^23}+3\sqrt{5^23}=$
$=4\cdot2\sqrt{3}-3\cdot2^2\sqrt{3}+2\cdot3\sqrt{3}+3\cdot5\sqrt{3}=8\sqrt{3}-12\sqrt{3}+6\sqrt{3}+15\sqrt{3}=(8-12+6+15)\sqrt{3}=$
$=17\sqrt{3}$

4e) $\sqrt{8}-\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{32}=\sqrt{2^22}-\sqrt{3^23}+\sqrt{2^23}-\sqrt{2^42}=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2^2\sqrt{2}$
$=-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

5a) $2a^3b\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^32a^9b^3}=\sqrt[3]{2^4a^9b^3}$

6a) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}=\sqrt{5^2\sqrt{3^4\sqrt{2^8}}}=\sqrt{5^2\sqrt{3^4\sqrt{2^8}}}=\sqrt{5^2\sqrt{\sqrt{3^82^8}}}=\sqrt{5^2\sqrt[4]{3^82^8}}=\sqrt{\sqrt[4]{5^83^82^8}}$
$=\sqrt[8]{5^83^82^8}$ =(extrayendo factores)= $5\cdot3\cdot2=30$. Hay otras formas de hacerlo.

6b) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$ =(con sumandos no se pueden aplicar las fórmulas fundamentales, que es lo que se basan todas estas operaciones) = $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+4}}}$ = $\sqrt{1+\sqrt{6+3}}=\sqrt{1+3}=2$

7a) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7b) $\frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}=\frac{3x^2}{\sqrt[3]{3x}}\frac{\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^2x^2}}=\frac{3x^2\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}}=\frac{3x^2\sqrt[3]{3^2x^2}}{3x}=x\sqrt[3]{3^2x^2}$

7c) $\frac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}=\frac{2x}{3\sqrt[5]{2x^3}}\frac{\sqrt[5]{2^4x^2}}{\sqrt[5]{2^4x^2}}=\frac{2x\sqrt[5]{2^4x^2}}{3\sqrt[5]{2^5x^5}}=\frac{2x\sqrt[5]{2^4x^2}}{3\cdot 2x}=\frac{\sqrt[5]{2^4x^2}}{3}$

7d) $\frac{2a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{ab^2}}=\frac{2a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{ab^2}}\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{2a^2\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2b}}{3\sqrt[3]{ab^2a^2b}}=\frac{2a^2\sqrt[6]{a^3}\sqrt[6]{a^4b^2}}{3\sqrt[3]{a^3b^3}}=\frac{2a^2\sqrt[6]{a^3a^4b^2}}{3ab}=$

$\frac{2a\sqrt[6]{a^7b^2}}{3b}=\frac{2a\sqrt[6]{a^6ab^2}}{3b}=\frac{2a^2\sqrt[6]{ab^2}}{3b}$

7e) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{3^2+(\sqrt{5})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}}{9-5}=\frac{9+5-6\sqrt{5}}{4}=$

$\frac{14-6\sqrt{5}}{4}=\frac{2(7-3\sqrt{5})}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ que no se puede simplificar más.

7f) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}(\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}\sqrt{3}+9\cdot 5}{3-9\cdot 5}=\frac{3\sqrt{15}+45}{3-45}$

$=\frac{3\sqrt{15}+45}{-42}=-\frac{3\sqrt{15}+45}{42}$

8a) $2(3a^2b^{1/2})^{1/3}=2\sqrt[3]{3a^2\sqrt{b}}$

8b) $\sqrt[3]{2^2a^2}=2^{2/3}a^{2/3}$

10a) $-3\sqrt{2}$

10b) $3\sqrt{7}$