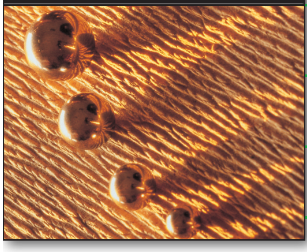
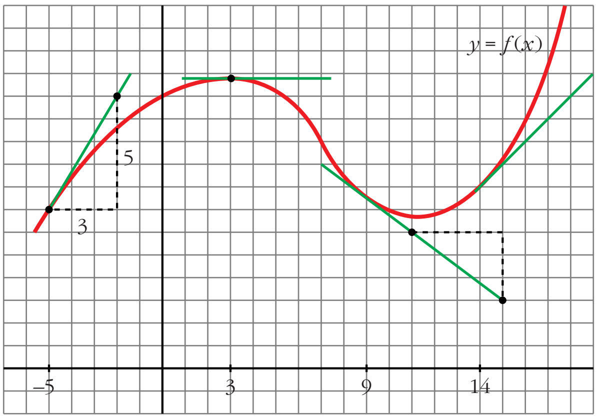
UNIDAD 6



DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN. APLICACIONES

Página 154

Problema 1



- **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

  $f'(3) = 0$; $f'(9) = \dfrac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

- **Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.**

  La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

- **Di otro punto en el que la derivada sea cero.**

  La derivada también es cero en $x = 11$.

- **Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.**

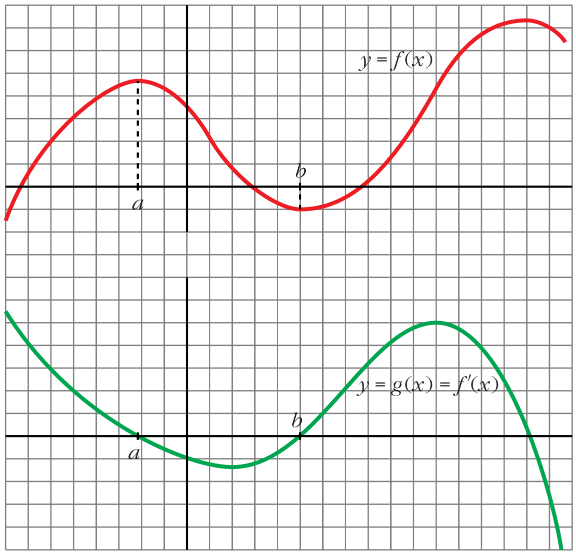
  La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

- **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

  Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Problema 2

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



- En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

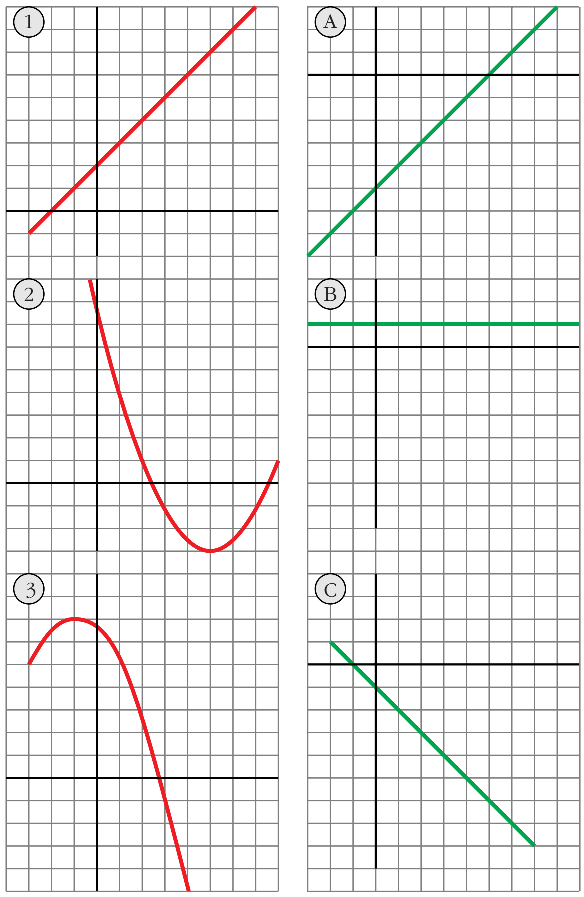
  $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

Página 155

Problema 3

- **¿Cuál es la derivada de cada cual?**

  Justifica tus respuestas con argumentos análogos a los que utilizaste en el problema anterior.



1) B

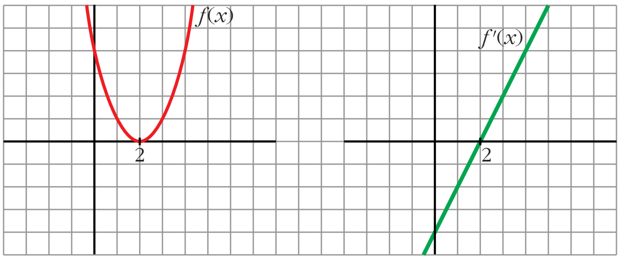
2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

- **Invéntate una gráfica sencilla y trata de esbozar la gráfica de su función derivada.**

Por ejemplo:



Página 157

1. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en** $x_0 = 2$**?**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1$$

La función no es continua en $x = 2$, pues $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Por tanto, tampoco es derivable en $x = 2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 8, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en** $x_0 = 2$**?**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 8) = -4$$

La función es continua, pues: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -4$

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = -3 \neq f'(2^+) = 4$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Página 161

1. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1-x}{1+x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$ **f)** $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$ **h)** $f(x) = log(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$ **j)** $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = 7^{sen\,(x^2+1)}$ **l)** $f(x) = sen(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$ **n)** $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x) \cdot (1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-(1+tg^2\,x)}{\sqrt{(1-tg\,x)(1+tg\,x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\,x}} = \ln e^{(tg\,x)/2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \ln 3 = \dfrac{\ln 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = \log (sen\,x \cdot \cos x)^2 = 2[\log (sen\,x + \log (\cos x)]$

$f'(x) = 2\left[\dfrac{\cos x}{sen\,x} \cdot \dfrac{1}{\ln 10} + \dfrac{-sen\,x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\ln 10}\right] = \dfrac{2}{\ln 10} \cdot \dfrac{\cos^2 x - sen^2\,x}{sen\,x \cdot \cos x} =$

$= \dfrac{4}{\ln 10} \cdot \dfrac{\cos^2 x - sen^2\,x}{2 sen\,x \cdot \cos x} = \dfrac{4}{\ln 10} \cdot \dfrac{\cos 2x}{sen\,2x} = \dfrac{4}{\ln 10 \cdot tg\,2x}$

De otra forma:

$f(x) = \log (sen\,x \cdot \cos x)^2 = 2 \log \left(\dfrac{sen\,2x}{2}\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{\cos 2x}{\dfrac{sen\,2x}{2}} = \dfrac{4}{\ln 10 \cdot tg\,2x}$

i) $f(x) = sen^2\,x + \cos^2 x + x = 1 + x$ $\qquad f'(x) = 1$

j) $f'(x) = \dfrac{\cos \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot (-sen\,\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{\cos \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot sen\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

k) $f'(x) = 7^{sen(x^2+1)} \cdot \ln 7 \cdot D(sen\,(x^2+1)) = 7^{sen(x^2+1)} \cdot \ln 7 \cdot 2x \cdot \cos (x^2+1)$

l) $f'(x) = \cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}} \cdot (\cos x + 2x) = \dfrac{\cos x + 2x}{2\sqrt{sen\,x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2\cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\,\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3-x)\cdot(-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{-2\cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sen\,\sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{(5-2x) \cdot sen\,\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$

2. **Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:**

a) $y = x^5$ **b)** $y = x \cos x$ **c)** $y = sen^2\, x + \cos^2 x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x \cos x$

$y' = \cos x - x\, sen\, x$

$y'' = -sen\, x - sen\, x - x \cos x = -2 sen\, x - x \cos x$

$y''' = -2\cos x - \cos x + x\, sen\, x = -3\cos x + x\, sen\, x$

c) $y = sen^2\, x + \cos^2 x + x = 1 + x$

$y' = 1;\ \ y'' = 0;\ \ y''' = 0$

3. **Calcula $f'(1)$ siendo: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\, \sqrt[30]{x^{17}}$$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. **Calcula $f'(\pi/6)$ siendo: $f(x) = (\cos^2 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$**

$$f(x) = (\cos^2 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x = \cos 6x \cdot sen\, 6x = \frac{sen\, 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\cos 12x}{2} = 6\cos 12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \cos \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot \cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. **Calcula $f'(0)$ siendo: $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$**

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{8x + 4}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - (16x^3 + 24x^2 + 24x + 8)}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)} =$$

$$= \frac{-16x^3 - 24x^2 + (2\sqrt{3} - 24)x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)}$$

Por tanto: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Página 162

1. Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \qquad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (3x - 9) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-)$$

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x^2 + n) = n$$

$f(0) = 5$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 163

1. Halla las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$ en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 4x + 3$ que sean paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.

$$y = x^3 - 4x + 3$$

Calculamos la derivada:

$$y' = 3x^2 - 4$$

Si son paralelas a la bisectriz del 2º y 4º cuadrante, la pendiente es -1. Por tanto:

$$3x^2 - 4 = -1 \quad \to \quad 3x^2 = 3 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x = \pm 1$$

$$y(-1) = 6 \quad y(1) = 0$$

Recta tangente en (–1, 6):

$$y = 6 - (x + 1) = -x + 5$$

Recta tangente en (1, 0):

$$y = 0 - (x - 1) = -x + 1$$

Página 164

1. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

a) $x < -1 \quad \rightarrow \quad y' > 0 \quad \rightarrow \quad f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \quad \rightarrow \quad y' > 0 \quad \rightarrow \quad f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \quad \rightarrow \quad y' < 0 \quad \rightarrow \quad f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 166

2. **Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de ellos estudiando el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo}$$

3. **a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

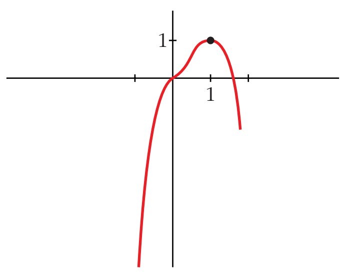
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1; 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hay un *punto de inflexión*.
- En $(1, 1)$ hay un *máximo relativo*.



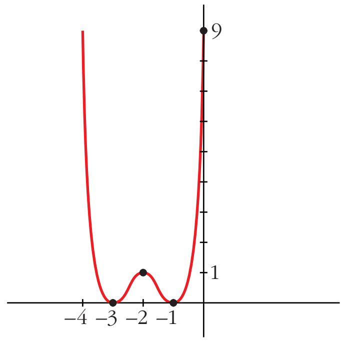
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \;\to\; \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \;\to\; \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \;\to\; \text{Punto } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un *mínimo relativo* en $(-3, 0)$, un *máximo relativo* en $(-2, 1)$ y un *mínimo relativo* en $(-1, 0)$.



Página 168

1. Estudia la curvatura de la función: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \;\to\; \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\; f'''(0) \neq 0;\; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\; \text{Punto } (2, 2)$$

$$\left(f'''(x) = 6;\; f'''(2) \neq 0\right)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 170

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

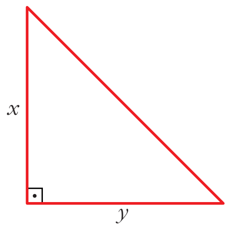
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \quad \to \quad f(5) = 10 \\ x = -5 \quad \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.



$$x + y = 10 \quad \to \quad y = 10 - x$$

$$Área = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

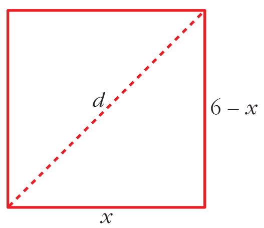
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \to \quad x = 5 \quad \to \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego, en } x = 5 \text{ está el máximo}\right).$

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

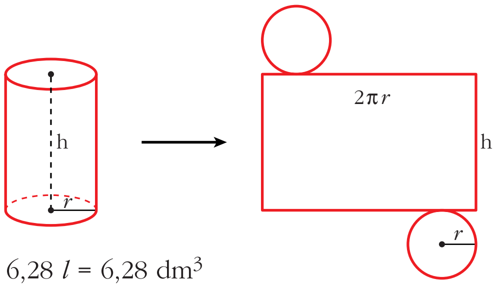
$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6 + 2x = 0 \quad \to \quad x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego, en $x = 3$ hay un mínimo). El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$\textit{Área total} = 2\pi r \text{h} + 2\pi r^2 = 2\pi r(\text{h} + r)$$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = \text{h}$

Así: $\textit{Áreal total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$r = 1 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{2}{1} = 2$. El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 178

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de las siguientes funciones en los intervalos: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$

c) $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la T.V.M.? ¿Qué tipo de funciones son?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{7h}{h} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En $[1, 1 + h]$ $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 \cdot (2^h - 1)}{h}$

La función b) $f(x) = 7x - 5$ es una función afín y la T.V.M. es constante.

La función c) $f(x) = 3$ es una función constante y la T.V.M. es 0 (constante).

2 **Halla la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[2, 2 + h]$ y, con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.**

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $[2, 2 + h]$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-h + 1) = 1$$

3 **Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{3x - 2}{7}$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 5)^2$ **d)** $f(x) = \frac{2 + x}{x}$

a) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3h/7)}{h} = \frac{3}{7}$

b) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = 6$

c) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$

d) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{9h + 3h^2} = \frac{-2}{9}$

4 **Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:**

a) $f(x) = \frac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5h}{2}}{h} = \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x - 2) \cdot (x + h - 2) \cdot h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x - 2) \cdot (x + h - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2}$$

d) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

Reglas de derivación

5 **Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

b) $y = \dfrac{x + 1}{(2 - x)^2}$

c) $y = \dfrac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$

d) $y = \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$

a) $y' = \dfrac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2 - x)^2 + (x + 1) \cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \dfrac{x + 4}{(2 - x)^3}$

c) $y' = \dfrac{6x \cdot (x + \sqrt{x}) - 3x^2 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \dfrac{9x^2 + 6x^2 \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x})^2}$

d) $y' = \dfrac{-4}{10} \cdot \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{-2}{5} \cdot \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3$

6 **Halla la derivada de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

b) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$

c) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

d) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

a) $y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x + 1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \dfrac{x^2 \cdot (x + 3)}{(x + 1)^3}$

b) $y' = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

c) $y' = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

d) $y' = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = e^{4x}(x - 1)$

b) $y = \dfrac{(1 - x)^2}{e^x}$

c) $y = \sqrt{2^x}$

d) $y = \ln(2x - 1)$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x - 1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x - 3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1 - x) \cdot e^x - (1 - x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1 - x) - (1 - x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot ln\ 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot ln\ 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

8 **Deriva estas funciones:**

a) $y = ln\,(x^2 - 1)$ **b)** $y = ln\,\sqrt{1 - x}$ **c)** $y = \dfrac{ln\ x}{e^x}$ **d)** $y = sen^2\ x^2$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1 - x}}}{\sqrt{1 - x}} = \dfrac{-1}{2(1 - x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - ln\ x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - ln\ x}{e^x} = \dfrac{1 - x \cdot ln\ x}{x \cdot e^x}$

d) $y' = 2x \cdot 2 \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 = 4x \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2$

9 **Calcula la derivada de estas funciones:**

a) $y = sen\ x\ cos^2\ x$ **b)** $y = \dfrac{sen^2\ x}{1 + cos^2\ x}$

c) $y = e^{x^2 + 1}$ **d)** $y = cos^3\,(2x + 1)$

a) $y' = cos^3\ x - 2 \cdot sen^2\ x \cdot cos\ x$

b) $y' = \dfrac{2sen\ x \cdot cos\ x \cdot (1 + cos^2\ x) + sen^2\ x \cdot 2cos\ x \cdot sen\ x}{(1 + cos^2\ x)^2} = \dfrac{4sen\ x \cdot cos\ x}{(1 + cos^2\ x)^2}$

c) $y' = 2x \cdot e^{x^2 + 1}$

d) $y' = -2 \cdot 3 \cdot cos^2(2x + 1) \cdot sen(2x + 1) = -6 \cdot cos^2(2x + 1)sen(2x + 1)$

10 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = log_2 \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{sen\ x^2}$ **c)** $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ **d)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y = log_2 1 - log_2 x$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2}$$

b) $y' = \dfrac{2x \cdot cos\ x^2}{3\sqrt[3]{sen^2\ x^2}}$

c) $$y' = \frac{\dfrac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\dfrac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$$

d) $$y' = \frac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

11 **Halla la derivada de:**

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = ln\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

c) $y = ln\,(sen\sqrt{e^x}\,)$ **d)** $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

a) $y = \sqrt[4]{x^3} \quad \to \quad y' = \dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \left(ln\ x - ln\ (x+1)\right)$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c) $y' = \dfrac{e^{x/2} \cdot cos\sqrt{e^x}}{2 \cdot sen\sqrt{e^x}}$

d) $$y' = \frac{\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$$

Recta tangente

12 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:**

a) $y = \dfrac{1 - 3x^2}{2}$ **en** $x = 1$

b) $y = 0{,}3x - 0{,}01x^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x + 12}$ **en** $x = -3$

d) $y = \dfrac{1}{x}$ **en** $x = 2$

e) $y = \dfrac{x + 5}{x - 5}$ **en** $x = 3$

f) $y = sen^2\, x$ **en** $x = \dfrac{\pi}{2}$

g) $y = e^{-x}$ **en** $x = 0$

h) $y = sen\, x \cos x$ **en** $x = \dfrac{\pi}{4}$

i) $y = ln\,(x + 1)$ **en** $x = 0$

j) $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

a) • Ordenada en el punto: $x = 1 \;\rightarrow\; y = -1$

• Pendiente de la recta: $y' = -3x \;\rightarrow\; y'(1) = -3$

Recta tangente: $y = -1 - 3 \cdot (x - 1) = -3x + 2$

b) • Ordenada en el punto: $x = 10 \;\rightarrow\; y = 2$

• Pendiente de la recta: $y' = 0{,}3 - 0{,}02x \;\rightarrow\; y'(10) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

Recta tangente: $y = 2 + 0{,}1 \cdot (x - 10) = 0{,}1x + 1$

c) • Ordenada en el punto: $x = -3 \;\rightarrow\; y = 3$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 12}} \;\rightarrow\; y'(-3) = \dfrac{1}{6}$

Recta tangente: $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x + 3) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{2}$

d) • Ordenada en el punto: $x = 2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-1}{x^2} \;\rightarrow\; y'(2) = \dfrac{-1}{4}$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \cdot (x - 2) = \dfrac{-1}{4}x + 1$

e) • Ordenada en el punto: $x = 3 \;\rightarrow\; y = -4$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-10}{(x - 5)^2} \;\rightarrow\; y'(3) = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$

Recta tangente: $y = -4 - \dfrac{5}{2} \cdot (x - 3) = \dfrac{-5}{2}x + \dfrac{7}{2}$

f) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = 2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Recta tangente: $y = 1$

g) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = -e^{-x} \rightarrow y'(0) = -1$

Recta tangente: $y = 1 - 1 \cdot x = -x + 1$

h) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = cos^2\, x - sen^2\, x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Recta tangente: $y = \frac{1}{2}$

i) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{1}{x + 1} \rightarrow y'(0) = 1$

Recta tangente: $y = x$

j) • Ordenada en el punto: $x = e \rightarrow y = e$

• Pendiente de la recta: $y' = ln\, x + 1 \rightarrow y'(e) = 2$

Recta tangente: $y = e + 2 \cdot (x - e) = 2x - e$

Página 179

13 S **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculamos la pendiente de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$$4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow \text{Pendiente } 2.$$

$$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$$

La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, -2)$:

$$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \rightarrow y = 2x$$

14 S **Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2,\ 4) \end{cases}$$

Recta tangente en $(0, 0)$: $y = -2x$

Recta tangente en $(2, 4)$: $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

15 S **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

$$y' = 4 - 2x \begin{cases} y'(0) = 4 \;\text{ pendiente en } (0,\ 0) \\ y'(4) = -4 \;\text{ pendiente en } (4,\ 0) \end{cases}$$

Rectas tangentes:

En $(0, 0) \;\rightarrow\; y = 4x$

En $(4, 0) \;\rightarrow\; y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

16 **Halla los puntos de tangente horizontal en las siguientes funciones y escribe la ecuación de la tangente en esos puntos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1/3 \;\rightarrow\; y = 4/27 \end{cases}$

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = +\sqrt{2}/2 \;\rightarrow\; y = 1/4 \\ x = -\sqrt{2}/2 \;\rightarrow\; y = 1/4 \end{cases}$

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \;\rightarrow\; -6x^2 + 6 = 0 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 \\ x = -1 \;\rightarrow\; y = -3 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; y = -1 \\ x = -2 \;\rightarrow\; y = -9 \end{cases}$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

17 **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **f)** $y = e^x(x - 1)$

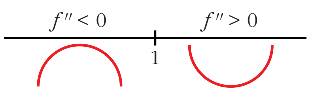
a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

No tiene ni máximos ni mínimos.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

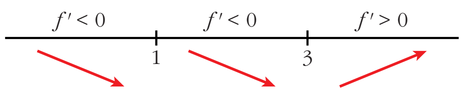


Hay un punto de inflexión en $(1, 29)$.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

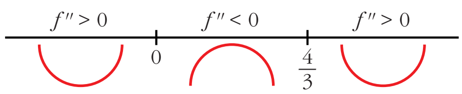
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

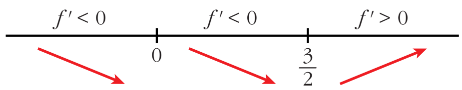
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

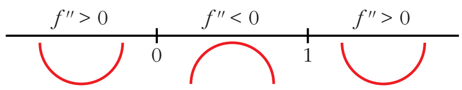
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\rightarrow\; y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

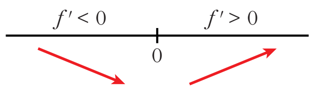
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad y = 0 \\ x = 1 \quad \to \quad y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 4x(x^2 + 1) = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0$



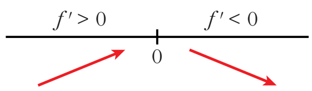
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

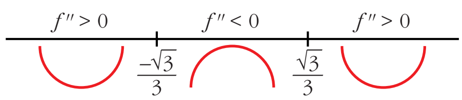
$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \to \quad y = \frac{3}{4}$$

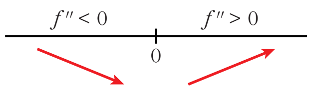


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; xe^x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

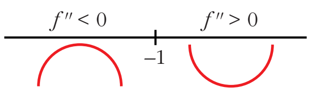
$y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = -1 \;\;\rightarrow\;\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

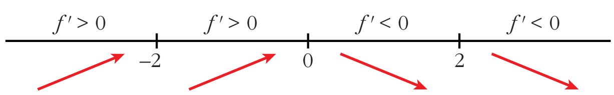
18 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{5}{(x + 1)^2}$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

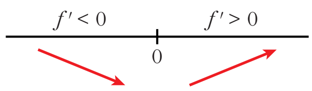
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

19 Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

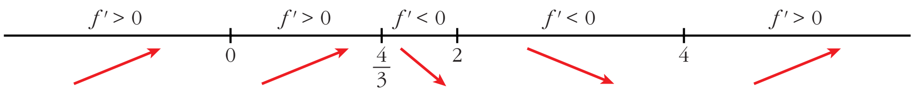
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$

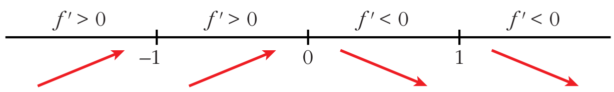
tiene un mínimo en $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

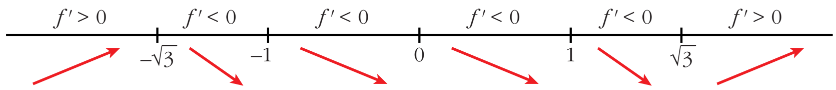
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

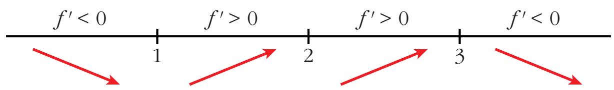
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

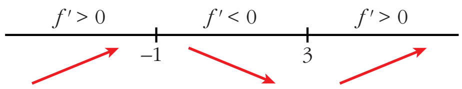
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

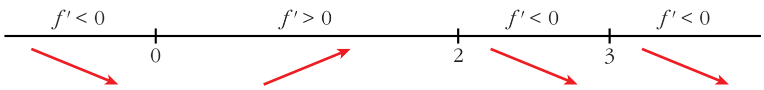
tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \dfrac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \dfrac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

20 **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

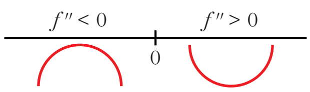
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

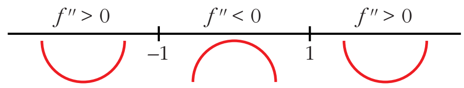
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

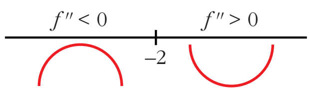
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad (e^x \neq 0$ para todo $x)$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

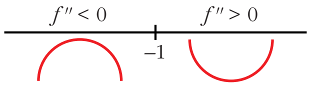
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x + 1)$. *Dominio* $= (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

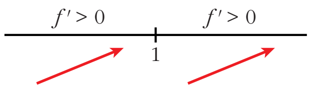
$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

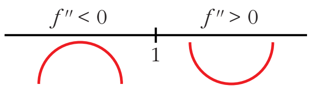
Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

21 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$

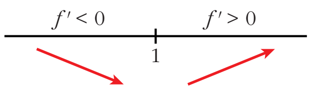
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$

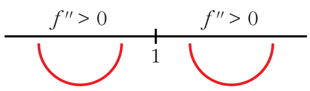




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

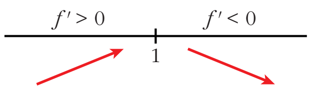
b) $f'(x) = 4(x - 1)^3$; $f''(x) = 12(x - 1)^2$

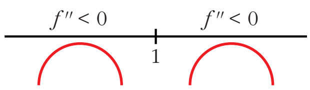




Hay un mínimo en $x = 1$.

c) $f'(x) = -6(x - 1)^5$; $f''(x) = -30(x - 1)^4$





Hay un máximo en $x = 1$.

PARA RESOLVER

22 **Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.**

$$y' = 3x^2 - 12x + 8$$

Veamos para qué valor de x tiene pendiente -1:

$$3x^2 - 12x + 8 = -1$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = -3 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 \end{cases}$$

El punto $(3, -3)$ verifica la ecuación.

Veamos los puntos de corte:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \;\rightarrow\; x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3 \;\rightarrow\; y = -3 \end{cases}$$

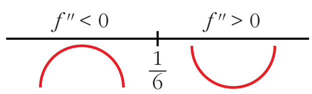
El otro punto de corte es $(0, 0)$.

23 S **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Página 180

24 S **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax + b \quad \to \quad y'(2) = 2 \quad \to \quad 4a + b = 2 \\ \text{Pasa por } A(2, 1) \quad \to \quad y(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ \text{Pasa por } B(5, -2) \quad \to \quad y(5) = 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\}$$

Solución del sistema: $a = -1,\ \ b = 6,\ \ c = -7 \quad \Rightarrow \quad y = -x^2 + 6x - 7$

25 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en (2, 1). Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

26 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

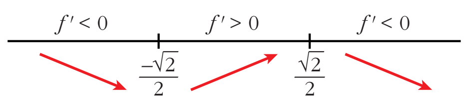
a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \to & a + b = 1 \\ f'(1) = -3 & \to & 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -3(2x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

27 **S** **Considera la siguiente función:** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

a) Continuidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

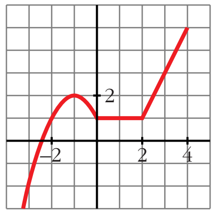
$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola: $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$**

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

29 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \;\rightarrow\; y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \;\rightarrow\; y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

30
S

Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$; o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

• **Si** $x \neq 2$ $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

• **En** $x = 2$**:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

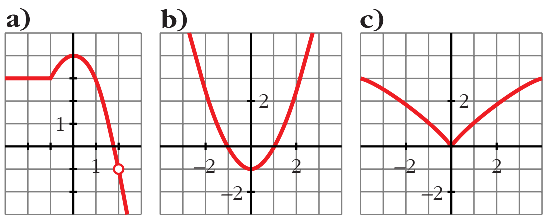
Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

31 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto “anguloso”) ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto “anguloso”).

32 S **La función $f(x)$ está definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

• **En** $x \neq 0$ $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.

• **En** $x = 0$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$ Para que sea continua ha de ser $b = 0$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

33 S **Considera esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

c) ¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

d) Represéntala gráficamente.

a) Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Puntos en los que $f'(x) = 0$:

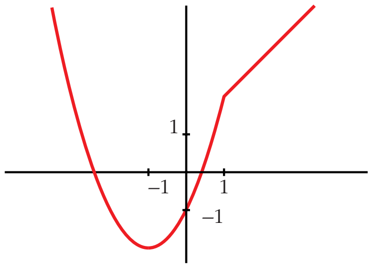
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

d) Gráfica de $f(x)$:



34 **S** **De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que:**

— Tiene un mínimo en $x = 2$.

— Su gráfica pasa por el punto (2, 2).

Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(2) = 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$

$f(2) = 4 - 8 + b = 2 \rightarrow b = 6$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6$

$f(1) = 3$

35 **S** **Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto (–2, 1) y presente un mínimo en $x = -3$.**

$y = x^2 + px + q$

$y' = 2x + p \rightarrow y'(-3) = -6 + p = 0 \rightarrow p = 6$

$f(-2) = -8 + q = 1 \rightarrow q = 9$

$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 9$

36 **S** **La función $f(x)$ está definida de la siguiente manera:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \ne 0$ y $x \ne 3$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0$$

En $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \\ \text{No es continua en } x = 3 \end{array}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Derivabilidad:

Si $x \ne 0$ y $x \ne 3$. Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 0 & 0 < x < 3 \\ -2x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 0$

$f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad$ No es derivable en $x = 0$.

En $x = 3$ $\rightarrow$ No es derivable pues no es continua.

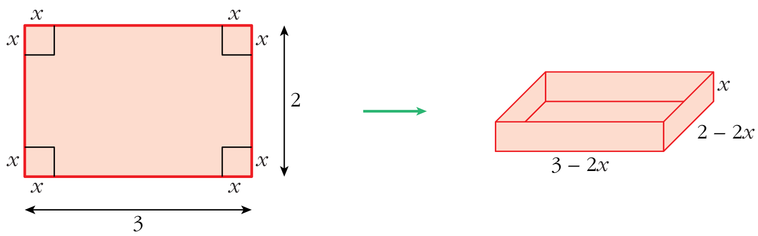
La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.

Página 181

Problemas de optimización

37 S **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0,\ 1)$$

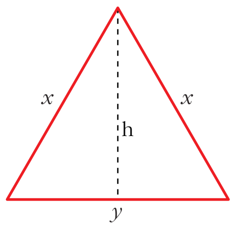
$$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6 - 20x + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \ \text{(no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$$

$$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0{,}39) < 0 \;\Rightarrow\; x = 0{,}39 \ \text{ es máximo.}$$

38 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**



$$Perímetro = 2x + y = 30 \;\rightarrow\; y = 30 - 2x$$

$$Altura = h = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$Área = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225}}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

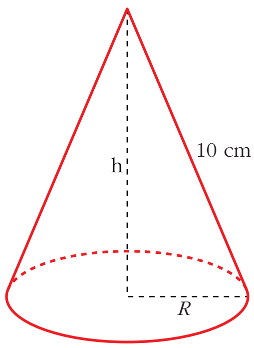
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \ \ \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($x = 15$ no vale, pues quedaría $y = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3\ \text{cm}^2$.

39 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$$h^2 + R^2 = 100 \ \rightarrow\ R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \ \rightarrow\ 100 - 3h^2 = 0 \ \rightarrow\ h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

$\left(f'(h) > 0\right.$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

Luego, en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo$\left.\right)$.

Por tanto, el radio de la base será: $R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \ \rightarrow\ R = \sqrt{\frac{200}{3}}$

40 **Se sabe que el rendimiento, r en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1 - t)$ siendo $0 \leq t \leq 1$, t en horas.**

a) Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento.

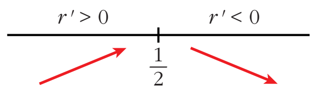
b) ¿Cuándo se anula?

c) ¿Cuándo es máximo?

$r(t) = 300t(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, t en horas.

a) $r'(t) = 300 - 600t$

$r'(t) = 0 \ \rightarrow\ t = \frac{1}{2}$



$r(t)$ aumenta entre 0 y $\frac{1}{2}$, pues r es creciente.

$r(t)$ disminuye entre $\frac{1}{2}$ y 1, pues r es decreciente.

b) $r(t) = 0 \quad \to \quad 300t \cdot (1 - t) = 0 \quad \to \quad t = 0$ y $t = 1$

c) $r'(t) = 0 \quad \to \quad t = \frac{1}{2}$. (Es máximo pues $r' > 0$ a su izquierda y $r' < 0$ a su derecha).

41
S **Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad y sabe que si el precio de venta es 750 €, vende 30 unidades al mes y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas de cada mes en 3 unidades. Determina el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante.**

Llamamos: x = nº de veces que se descuentan 20 €.

Así, el precio por unidad será de: $750 - 20x$, y por tanto se venderán $30 + 3x$ unidades al mes; luego el dinero obtenido por las ventas vendrá dado por la función:

$$f(x) = (750 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 1\,650x + 22\,500$$

Maximizar los beneficios es equivalente a maximizar esta función:

$$f'(x) = -120x + 1\,650$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\,650}{120} = 13{,}75$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

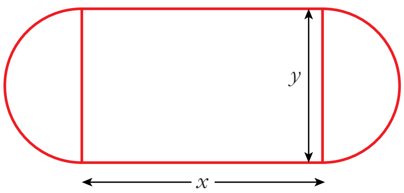
$$f''(x) = -120$$

$$f''(13{,}75) = -120 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 13{,}75 \text{ es máximo}$$

Por tanto, el precio de venta que hace máximos los beneficios es:

$$750 - 20 \cdot x = 750 - 20 \cdot 13{,}75 = 750 - 275 = 475 \text{ €/unidad}$$

42
S **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 50 \text{ m} \quad \rightarrow \quad y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50 \ \text{ es máximo}\right)$$

43 S El saldo, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

Deduce razonadamente el valor de t en el que el capital fue máximo.

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

En el primer intervalo se trata de una función afín decreciente que alcanza el máximo valor en 0, $f(0) = 4$.

En el segundo intervalo tenemos otra función afín creciente, por lo que alcanza su máximo valor en 8^-, $f(8^-) = 3{,}36$.

En el tercer intervalo, derivamos:

$$f'(t) = 0{,}2 \cdot (t - 8)$$

Tiene un mínimo en $t = 8$, por lo que alcanza el máximo en el otro extremo del intrvalo: $f(12) = 4{,}96$.

Por tanto, el capital fue máximo en $t = 12$.

44 S Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. (Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora). La función que expresa dicho rendimiento es: $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$ siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.

a) Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo se produce el mínimo rendimiento.

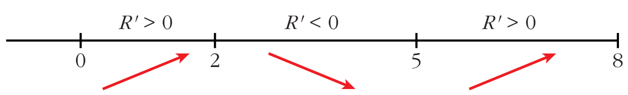
b) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

Vamos a suponer una jornada laboral de 8 horas; es decir:

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3; \quad t \in [0, 8]$$

a) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2$

$$R'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 30 - 21t + 3t^2 = 0 \quad \begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$



$R(0) = 0 \qquad R(2) = 26$

$R(5) = 12,5 \quad R(8) = 80$

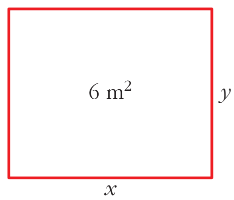
Hay un mínimo relativo en $t = 5$ y un máximo relativo en $t = 2$, pero el mínimo absoluto corresponde a $t = 0$ y el máximo absoluto a $t = 8$ horas.

b) T.V.M.$[2, 4] = \dfrac{R(4) - R(12)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

45 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) Área $= x \cdot y = 6 \quad \to \quad y = \dfrac{6}{x}$

Coste $= 2,5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$C = 5x + \frac{36}{x}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \quad \to \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2,68 \text{ m} \quad \to \quad y = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3}; \quad C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right)$$

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26,83$ €

46 **Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:**

$$\mathbf{R(x) = -0,001x^2 + 0,4x + 3,5}$$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,4x + 3,5$$

a) $R'(x) = -0,002x + 0,4$

$R'(x) = 0 \quad \to \quad x = 200$ miles de €.

$(R''(x) = -0,002, \quad R''(200) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 200$ es máximo$)$

Invirtiendo 200 000 € se obtiene la máxima rentabilidad.

b) $R(200) = 43,5$ miles de € = 43 500 €.

47 **Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que este llevaba en el mercado por la función:**

$$\boldsymbol{P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos 6 años?

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) $P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ -5/2 & 2 < t < 8 \end{cases}$ (No existe $P'(2)$, pues $P'(2^-) \ne P'(2^+)$).

$P(t)$ es creciente en $0 < t < 2$ pues $P'(t) > 0$.

$P(t)$ es decreciente en $2 < t < 8$ pues $P'(t) < 0$.

b) El máximo se alcanza en $t = 2$, $P(2) = 20$.

c) $\text{T.V.M.}[2, 8] = \dfrac{P(8) - P(2)}{8 - 2} = \dfrac{5 - 20}{6} = \dfrac{-15}{6} = \dfrac{-5}{2} = -2,5$

Página 182

48 **Una empresa de mensajería ofrece estas tarifas:**

— Si la carga es menor de 2 kg, costará 8 € por kilo.

— A partir de 2 kg, el precio por kilo se obtiene restando de 8 el número de kilos que exceden de 2.

La carga máxima que puede llevar un mensajero es 6 kg. Sea x el peso de la carga, $P(x)$ la función que nos da el precio por kilo de carga e $I(x)$ la función que nos da los ingresos de la empresa.

a) Halla las expresiones algebraicas de $P(x)$ e $I(x)$ y represéntalas.

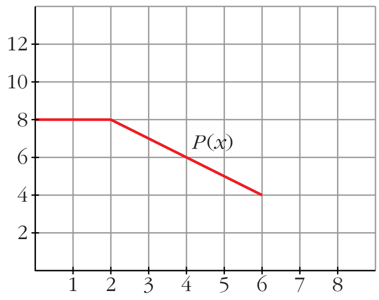
b) ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo ingreso?

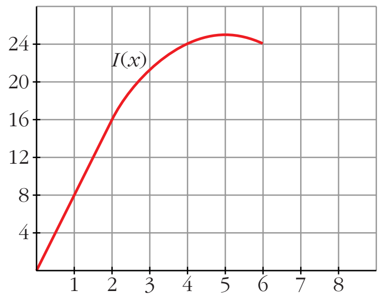
a) Precio por kilogramo de carga:

$$P(x) = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 8 - (x - 2), & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 10 - x, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

Ingresos en función de los kilos de carga:

$$I(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ (10 - x)x, & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ 10x - x^2, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$





b) Se obtiene el máximo ingreso para $x = 5$.

CUESTIONES TEÓRICAS

49 **S** **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener? ¿Puede tener uno o ninguno?**

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

Por ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{ Dos puntos}$$

$$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Un punto}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0 \text{ para todo } x \;\rightarrow\; \text{Ninguno}$$

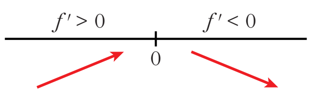
50 **S** **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

51 **S** **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. ¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\quad$ $f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

52 **S** **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

¿Puede ser $f'(a) > 0$?

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$?

Razona tus respuestas.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\rightarrow\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} f'(0) = 0 & (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

53 **Considera la función $|x|$ (valor absoluto de x):**

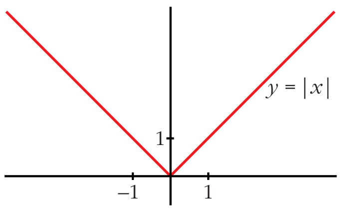
a) ¿Presenta un mínimo relativo en algún punto?

b) ¿En qué puntos es derivable?

Razona tus respuestas.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

54 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable.**

¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$?

Razona tu respuesta.

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \;\Rightarrow\; f(x)$ es creciente; es decir, si $a > b \;\Rightarrow\; f(a) > f(b)$, y si $a < b \;\Rightarrow\; f(a) < f(b)$.

Por tanto, no puede ser $f(a) = f(b)$. (En este caso, tendría que existir un punto c entre a y b, en el que $f'(c) = 0$).

55 **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

Justifica tu respuesta.

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \quad \to \quad f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

56 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?**

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

57
S **De una función $f(x)$ se sabe que:**

$$f(1) = f(3) = 0; \quad f'(2) = 0; \quad f''(2) > 0$$

¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de esta función?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = f(3) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) > 0 \end{array}\right\} \quad f \text{ tiene un mínimo en } x = 2.$$

58
S **La representación gráfica de la función derivada de una función f, es una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2).**

Utilizando la gráfica de la derivada:

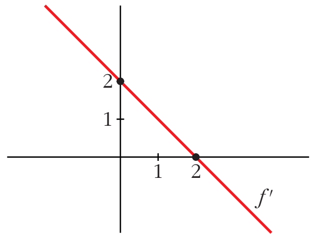
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Estudia si la función f tiene máximo o mínimo.

a) $x < 2 \quad \to \quad f' > 0 \quad \to \quad f$ creciente

$x > 2 \quad \to \quad f' < 0 \quad \to \quad f$ decreciente

b) $x = 2 \quad \to \quad f' = 0$ y tiene un máximo



59 **S** **Si la gráfica de la derivada de g es una parábola que corta al eje OX en (0, 0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1), ¿qué puedes decir del crecimiento y decrecimiento de g?**

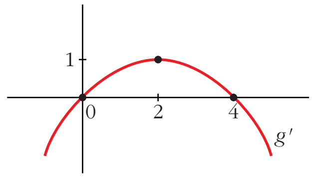
Determina si la función g presenta máximos o mínimos.

Si $x < 0 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

Si $0 < x < 4 \rightarrow g' > 0 \rightarrow g$ creciente

Si $x > 4 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

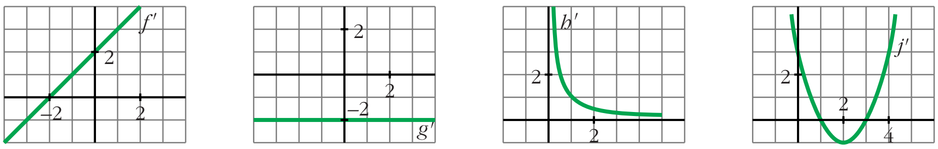
En $x = 0$ tiene un mínimo y en $x = 4$ un máximo.



Página 183

PARA PROFUNDIZAR

60 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

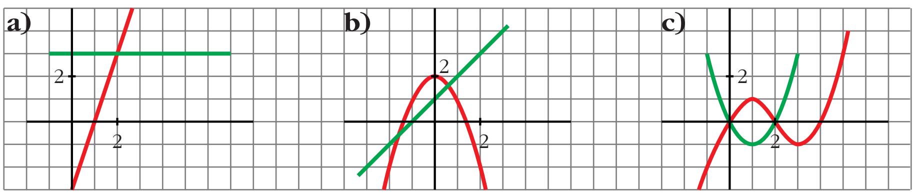
j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

61 **¿Cuál de estas gráficas representa la función f y cuál su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera es válida.

62 Estudia la derivabilidad de estas funciones:

a) $y = \sqrt[3]{x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = ln\,(x^2 - 4)$

a) $y = \sqrt[3]{x}$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

c) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

d) $y = ln(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 > 0 \;\rightarrow\; x^2 > 4 \;\rightarrow\; x < -2$ ó $x > 2$

$f(x)$ es continua si $x < -2$ ó $x > 2$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$f(x)$ es derivable si $x < -2$ ó $x > 2$ (pues para ser derivable ha de ser continua).

63 **Sea la función: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

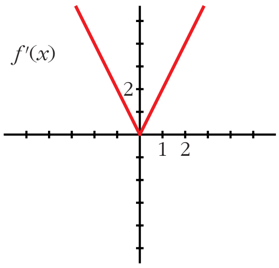
Halla $f'(x)$, $f''(x)$ y represéntalas.

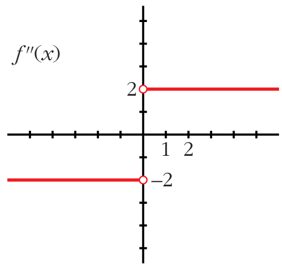
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, pues $f''(0^-) \ne f''(0^+)$.





64 **Prueba que la función $f(x) = x + |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$.**

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{array}\right\} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \ne f'(3^+) = 2$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

65 **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

$f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x}$

…

$f^n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

66 **Dada la función $f(x) = e^x + \ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \quad \to \quad f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1-x)^2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1-x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

67 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

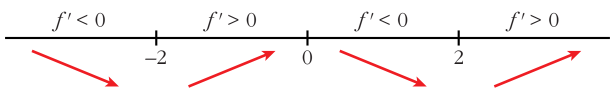
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.

68 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

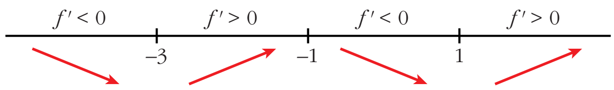
$$2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$$

Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

$$-2x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -1 \quad \text{y} \quad f'(x) = -2x - 2 \quad \text{para} \quad -3 < x < 1$$

Por tanto $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

69 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \to & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \to & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \to & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} \; f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

70 **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.

• **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } -2 + a = -a + b, \text{ es decir: } b = 2a - 2.$$

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0; \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases} \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

71 **¿Existe algún punto en el que $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ no sea derivable? Justifica tu respuesta.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Continuidad:

• **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

• **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1 \\[2ex] f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.