

1°.- a) Encontrar el punto de la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$  en el que  $z = 2$

b) Escribir la ecuación de la recta "s", paralela a "r" que pasa por el punto (0,0,0)

c) Escribir la ecuación del plano que contiene a las dos rectas, "r" y "s", anteriores.

**Solución:**

a) Haciendo  $z = 2$  en  $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$  y resolviendo, tenemos  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ , luego el punto buscado es el (1,4,2)

b) El vector director de la recta  $r$  es  $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [0, -3, -3] \Leftrightarrow [0, 1, 1]$ , luego la

recta  $s$  es  $\begin{cases} y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) El vector de la recta  $r$  pertenece al plano buscado, y el vector que une los puntos (1,4,2) de la recta  $r$  y (0,0,0) de la recta  $s$  también pertenece al plano; luego el plano buscado es:

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda + 4\mu \Leftrightarrow 2x - y + z = 0 \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

---

2°.- Comprobar que las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + z + 5 = 0 \end{cases}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$  se

cortan en un punto ¿Cuál?

**Solución:**

Si las dos rectas se cortan en un punto, el sistema  $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \\ x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$  debe ser

compatible y determinado; aprovechamos el método de Gauss para estudiar al mismo tiempo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

Tanto la matriz de coeficientes como la ampliada tienen el mismo rango, 3; luego el sistema es compatible y determinado y los planos se cortan en un punto.

Para encontrar el punto de contacto, resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -5y - z = -9 \\ 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow (1, 2, -1) \text{ es el punto buscado}$$

3°. -a) Estudiar la posición relativa de los planos:  $\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = -2\lambda - \mu \end{cases}$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\gamma + \tau \\ y = 1 - 4\gamma \\ z = -1 + \gamma - \tau \end{cases}$$

b) Encontrar el plano que no tiene ningún punto en común con ninguno de los dos planos anteriores y que pasa por el origen de coordenadas.

**Solución:**

a) El vector  $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [1, 1, 1]$  es un vector normal al plano  $\pi_1$  y el vector

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [4, 4, 4]$  es vector normal al plano  $\pi_2$ ; como ambos vectores son

paralelos los planos son paralelos o coincidentes. Como el punto  $(3, 1, -1)$  del plano  $\pi_2$  no pertenece al plano  $\pi_1$ , como es fácil comprobar, los planos son paralelos

b) Todo plano paralelo a los otros no tiene ningún punto en común con ellos, luego tendrá la forma  $x + y + z + D = 0$ ; pero como tiene que pasar por  $(0, 0, 0)$ , el plano buscado es

$$x + y + z = 0$$