

1º)

Dado el punto $A(1, 2, -1)$, la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = y-1 = -z$ y el plano $\pi \equiv x + y - z + 2 = 0$

Calcular:

a) La distancia del punto A al plano π

Solución:

$$d_{(A,\pi)} = \frac{1+2+1+2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ unidades de longitud}$$

b) La distancia del punto A a la recta r

Solución:

$$d_{(A,r)} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{||[3,1,-1]||} = \frac{||[0,-4,-4]||}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11} \text{ unidades de longitud}$$

c) La longitud del segmento \overline{AB} , siendo B el punto de intersección de la recta r con el plano π

Solución:

La recta y el plano se cortan en el punto:

$$B: 2+3\lambda+1+\lambda+\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow (-1,0,1), \text{ luego}$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3} \text{ unidades de longitud}$$

d) Los puntos C y D en la recta r que distan $\sqrt{3}$ unidades del punto A .

Solución:

Los puntos buscados son los que cumplen la ecuación:

$$(2+3\lambda-1)^2 + (1+\lambda-2)^2 + (-\lambda+1)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 11\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

es decir los puntos: $(2,1,0)$ y $\left(\frac{16}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$

- e) El volumen del tetraedro que tiene tres de sus vértices en los puntos A, B y C y otro en el origen de coordenadas.

Solución:

Si consideramos como C el punto $(2,1,0)$, el volumen buscado es :

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ unidades de volumen}$$

Si consideramos que el punto C es $\left(\frac{16}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{16}{11} & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \text{ unidades de volumen}$$

2º) Calcula el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen a una mediatriz del segmento de extremos $A(2,4,3)$ y $B(0,0,1)$

Solución:

Las mediatrices del segmento \overline{AB} generan un plano perpendicular al segmento en su punto medio; es decir, un plano que contiene el vector normal $[2,4,2] \Leftrightarrow [1,2,1]$ y que pasa por el punto $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Leftrightarrow (1,2,2)$

$$x + 2y + z + d = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

Así el lugar geométrico buscado es el plano: $x + 2y + z - 7 = 0$