ESTUDIO DE SISTEMAS

1. Discute según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$. Resuélvelo cuando m = 5.

Solución:

El sistema se define mediante las matrices:

A ≡ matriz de coeficientes = $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

A* ≡ matriz ampliada = $\begin{pmatrix} m & 1 & 2-2m \\ 1 & m & m-1 \end{pmatrix}$

El estudio de sistemas se puede hacer de dos formas diferentes:

- por Roeché-Frobenius
- por Gauss

Rouché: en todo sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, el sistema es compatible determinado y la solución se puede obtener por el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

Discusión:

I. Sí $m \neq \pm 1$, $|A| \neq 0$ $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

II. Sí m = 1 $\rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ equivalente a $x + y = 0$. Sistema Compatible Indeterminado.

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A^* = 1 < n = 2$$

III. Sí m = -1 $\rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; Rg A = 1

$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Rg A* = 2

$$\text{Rg } A = 1 \neq \text{Rg } A^* = 2 \rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc:c} m & 1 & 2-m \\ 1 & m & m-1 \end{array}\right) = \{E_2 = mE_2 - E_1\} = \left(\begin{array}{cc:c} m & 1 & 2-2m \\ 0 & m^2-1 & m(m-1)-(2-2m) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:c} m & 1 & 2-2m \\ 0 & m^2-1 & m^2+m-2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc:c} m & 1 & 2(1-m) \\ 0 & (m-1)(m+1) & (m+2)(m-1) \end{array}\right)$$

I. Sí $m \neq \pm 1$ Sistema Compatible Determinado.

II. Sí m = 1 $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema Compatible Indeterminado

III. Sí m = -1 $\left(\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ Sistema Incompatible

b) Si m = 5 $\rightarrow \begin{cases} 5x + y = -8 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$ como ya se vio en el apartado a), para cualquier valor de m ≠ ± 1, el sistema es compatible determinado.

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-44}{24} = \frac{-22}{12} = -\frac{11}{6} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{28}{24} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Gauss:
Se sustituye m en la matriz triangularizada:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & \vdots & -8 \\ 0 & 24 & \vdots & 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 5x + y = -8 \\ 24y = 28 \end{matrix}\Bigg\} \rightarrow \begin{matrix} y = \frac{7}{6} \\ 5x + \frac{7}{6} = -8 \rightarrow 5x = -8 - \frac{7}{6} = -\frac{48-7}{6} \rightarrow 5x = \frac{-55}{6} \rightarrow x = \frac{-55}{30} = \frac{-11}{6} \end{matrix}$$

2. Determinar, si existe, el valor del parámetro **a** para que el sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + ay + z = 4 \\ -6x - 6y + 4z = -2 \end{cases}$, sea compatible y resolverlo para dicho valor de **a**.

Solución:

Rouché:

Al sistema lo definen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & a & 1 & 4 \\ -6 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$A \subset A^* \Rightarrow RgA \leq RgA^* \leq n = 3$$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ desarrollando el determinante por el método de Sarrus:

$$|A| = 2[2a - 6 - 36 - (-9a + 16 - 3)] = 2 \cdot (11a - 55) = 22 \cdot (a - 5)$$
$$|A| = 0 \Rightarrow 22 \cdot (a - 5) = 0; \quad a - 5 = 0; \quad a = 5$$

Discusión:

I. Sí $a \neq 5 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

II. Sí $a = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \\ -6 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2$$

Rango de A*:
Tomando como referencia el menor anterior, aparecen dos menores orlados de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es el determinante de la matriz A.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ -6 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Rg } A^* = 3$$

$$\text{RgA} = \text{RgA}^* = 2 < n = 3; \qquad n - \text{rgA} = 3 - 2 = 1$$

Sistema Compatible Indeterminado con un grado de indeterminación.

Solución:

I. Sí $m \neq 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -2 & -6 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{18(a-5)}{22(a-5)} = \frac{9}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -6 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{22(a-5)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 4 \\ -6 & -6 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16(a-5)}{22(a-5)} = \frac{8}{11}$$

II. Sí $m = 5$: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + z = 4 \\ -6x - 6y + 4z = -2 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{equivale}} \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + z = 4 \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Para resolver el sistema es necesario un parámetro por lo que se tomará una de las variables como constante. En principio se puede tomar cualquier constante, aunque en algunos sistemas el tomar una u otra como constante facilitará la resolución del sistema.

En este caso se toma la z como constante, por lo que se lleva al segundo miembro de cada ecuación, quedando el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - 3z \\ 4x + 5y = 4 - z \end{cases}$$

Resolviendo por el método de **Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3z & 2 \\ 4-z & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-7-13z}{-3} = -\frac{7}{3} + \frac{13}{3}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-3z \\ 4 & 4-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-8+11z}{-3} = \frac{8}{3} - \frac{11}{3}z$$

haciendo $z = \lambda$ se obtiene la solución indeterminada del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{7}{3}+\frac{13}{3}\lambda \\ y=\frac{8}{3}-\frac{11}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}\forall\lambda\in\Re$$

*La resolución de los determinantes se ha hecho por el método de Sarrus.

Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=3 \\ 4x+ay+z=4 \\ -6x-6y+4z=-2 \end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 4 & a & 1 & \vdots & 4 \\ -6 & -6 & 4 & \vdots & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[E_3=\frac{1}{2}E_3]{}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 4 & a & 1 & \vdots & 4 \\ -3 & -3 & 2 & \vdots & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{E_2=E_2-4E_1 \\ E_3=E_3+3E_1}]{}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & a-8 & -11 & \vdots & -8 \\ 0 & 3 & 11 & \vdots & 8 \end{pmatrix}\xrightarrow[E_3=E_3+E_2]{}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & a-8 & -11 & \vdots & -8 \\ 0 & a-5 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Discusión:

I. Sí $m\neq 5\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & a-8 & -11 & \vdots & -8 \\ 0 & a-5 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ Sistema Compatible Determinado

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=3 \\ (a-8)y-11z=-8 \\ (a-5)y=0 \end{array}\right\}: y=0:\left\{\begin{array}{l} x+3y=3 \\ -11z=-8 \end{array}\right\}: z=\frac{8}{11}$$

$$x+3\cdot\frac{8}{11}=3\rightarrow x+\frac{24}{11}=3\rightarrow x=3-\frac{24}{11}=\frac{9}{11}$$

$$x=\frac{9}{11};\quad y=0;\quad z=\frac{8}{11}$$

II. $m=5\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & -11 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ Sistema Compatible Indeterminado

$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=3 \\ 3y+11z=8 \end{array}\right\}$ tomando z como constante: $\left.\begin{array}{l} x+2y=3-3z \\ 3y=8-11z \end{array}\right\} y=\frac{8}{3}-\frac{11}{3}z$

$$x+2\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{11}{3}z\right)=3-3z\quad;\quad x+\frac{16}{3}-\frac{22}{3}z=3-3z$$

$$x=3-3z-\frac{16}{3}+\frac{22}{3}z=-\frac{7}{3}+\frac{13}{3}z$$

haciendo $z=\lambda$ se obtiene: $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{7}{3}+\frac{13}{3}\lambda \\ y=\frac{8}{3}-\frac{11}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}\forall\lambda\in\Re$

3. Discutir según el parámetro y resolver cuando sea posible el sistema: $\begin{cases} (k+1)x - y + z = 2k \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ x - ky + (k+1)z = k \end{cases}$

Solución:

Al sistema lo definen las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ 1 & -k & k+1 \end{pmatrix}; \qquad A^* = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \\ 1 & -k & k+1 & k \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^* \Rightarrow RgA \le RgA^* \le n = 3$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes (A) de un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas es distinto de cero, el sistema es compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} k+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ 1 & -k & k+1 \end{vmatrix} = \text{desarrollando por menores:}$$

$$|A| = k^3 + 3k^2 + 2k = k \cdot (k^2 + 3k + 2) = k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$$

Discusión:

I. Sí $k \ne 0, -1, -2 \Rightarrow |A| \ne 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ k & -k & k+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k^2(2k+3)}{k \cdot (k+1)(k+2)} = \frac{k \cdot (2k+3)}{(k+1)(k+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 2k & 1 \\ 1 & 0 & k+1 \\ 1 & k & k+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^2(k+2)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{-k}{k+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & -1 & 2k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -k & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^2}{k \cdot (k+1)(k+2)} = \frac{-k}{(k+1)(k+2)}$$

II. Sí $k = 0 \to \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$ sistema homogéneo y por tanto compatible.

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_2=E_2-E_1 \\ E_3=E_3-E_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=2E_3-E_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{Sist. comp. indet..}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} : \left.\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo hace falta tomar una variable como constante: z.

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

haciendo $z = \lambda$ se obtiene la solución:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \forall \lambda \in \Re$$

Rouché:

Por ser un sistema homogéneo: $A \equiv A^* \Rightarrow RgA = RgA^*$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RgA = RgA^* = 2 < n = 3$$

Sistema Compatible Indeterminado con un grado de indeterminación. El rango del sistema informa que solo hay dos ecuaciones linealmente independientes.
Para saber cuales son las ecuaciones linealmente independientes basta con fijarse en las ecuaciones que han proporcionado el coeficiente del menor que ha determinado el rango de la matriz. En este caso que nos ocupa el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

se ha obtenido a partir de los coeficientes de las dos primeras ecuaciones, por tanto el sistema equivalente es:

$$S': \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

tomando z como constante:

$$\begin{cases} x - y = -z \\ x + y = -z \end{cases}$$

Resolviendo por **Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2z}{2} = -z \qquad ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{2} = 0$$

III. Sí $k = -1 \rightarrow \begin{cases} -y + z = -2 \\ x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$

En este caso basta fijarse que la segunda y tercera ecuación son una incongruencia por lo que se trata de un sistema incompatible.

Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \Rightarrow E_3 - E_2]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistema Incompatible.

Rouché:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow RgA = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow RgA \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow RgA^* = 3$$

$$Rg\ A \neq Rg\ A^* \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

IV. Sí $k=-2 \rightarrow \begin{cases} -x-y+z=-4 \\ x+y-z=0 \\ x+2y-z=-2 \end{cases}$

Como el apartado tres, en este caso la primera y la segunda ecuación presentan una incongruencia, por lo que el sistema es incompatible.

Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & \vdots & -4 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=E_3+E_1]{E_2=E_2+E_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -6 \end{pmatrix}$$

Sistema incompatible. La segunda ecuación es una incongruencia.

Rouché:

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\qquad$ Rg $A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\qquad$ Rg $A^* \geq 2$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}A^* = 3$

$$\text{Rg } A \neq \text{Rg } A^* \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Otra forma de estudiar y resolver los sistemas es un método conjugado. Mediante un determinante se obtienen los valores para los que discutir el sistema, llevando a cabo la discusión mediante el método de Gauss, este método conjugado evita la triangularización de la matriz del sistema que puede llegar a complicarse con los parámetros y el estudio de los rangos de las matrices que definen el sistema.

4. Discutir el sistema según los valores de **m**, y resolverlo cuando sea compatible

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Solución:

Por el método de **Gauss:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 5 & -5 & 2 & \vdots & m \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=E_3-2E_1]{E_2=E_2-5E_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & m-15 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3=E_3-E_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & m-15 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 10-m \end{pmatrix}$$

$$10-m=0\ ;\ m=10$$

Discusión:

I. Sí $m \neq 10 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 10-m \end{pmatrix}$

Sistema Incompatible, la tercera ecuación se ha transformado en una incongruencia.

II. Sí $m = 10 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema se toma una variable como constate: z

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 3 - z \\ 5y = -5 + 3z \end{array} \right\}$$

$y = \dfrac{-5+3z}{5} = -1 + \dfrac{3}{5}z$; $\qquad x - 2(-1 + \dfrac{3}{5}5z = 3 - z \rightarrow x + 2 - \dfrac{6}{5}z = 3 - z \rightarrow x = 1 + \dfrac{1}{5}z$

Haciendo $z = \lambda$ se obtiene la solución:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{5}\lambda \\ y = -1 + \dfrac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \Re$$

5. Discutir el sistema según los valores de **m**, y resolver en los casos de compatibilidad

$$\begin{cases} mx - y = 4 \\ x + ay = 6 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases}$$

Solución:

Gauss:

$$\begin{pmatrix} m & -1 & \vdots & 4 \\ 1 & m & \vdots & 6 \\ 4 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_2]{} \begin{pmatrix} 1 & m & \vdots & 6 \\ m & -1 & \vdots & 4 \\ 4 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_2 = E_2 - mE_1 \\ E_3 = E_3 - 4E_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & m & \vdots & 6 \\ 0 & -1-m^2 & \vdots & 4-6m \\ 0 & -7-4m & \vdots & -24 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3 = (-1-m^2)E_3 - (-7-4m)E_2]{} \begin{pmatrix} 1 & m & \vdots & 6 \\ 0 & -1-m^2 & \vdots & 4-6m \\ 0 & 0 & \vdots & 52-26m \end{pmatrix} \qquad 52 – 26\,m = 0; \quad m = 2$$

Discusión:

I. Sí $m \neq 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & \vdots & 6 \\ 0 & -1-m^2 & \vdots & 4-6m \\ 0 & 0 & \vdots & 52-26m \end{pmatrix}$

La tercera ecuación se ha convertido en una incongruencia, por lo que es un sistema incompatible.

II. Sí $m = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & -5 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ -5y = -8 \end{array} \right\}$ Sistema Compatible Determinado.

Solución:

$$y = \frac{8}{5}$$

$$x + 2 \cdot \frac{8}{5} = 6 \rightarrow x = 6 - \frac{16}{5} \rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Rouché:

Sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 1 & m & 6 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^* \Rightarrow RgA \le RgA^*$$

Dadas las dimensiones de las matrices, sus rangos serán Rg A ≤ 2 y Rg A* ≤ 3, lo cual permite plantear el estudio del sistema del siguiente modo: Si el determinante de la matriz ampliada es distinto de cero, el Rg A* = 3 > Rg A por lo que el sistema será incompatible.

El estudio del determinante de la matriz ampliada de los valores para la discusión del sistema:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 1 & m & 6 \\ 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 25 \cdot (2 - m) \text{ por Sarrus.}$$

Discusión:

I. Sí $m \ne 2 \Rightarrow |A^*| \ne 0$ y por tanto Rg A* = 3 > Rg A. Sistema Incompatible.

II. Sí $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow RgA = 2$$

Rg A* = 2 ya que Rg A = 2 y Rg A* < 3, teniendo en cuenta que para m = 2 |A*| = 0. Sistema Compatible Determinado.

$$S'(\text{equivalente}): \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Solución mediante el método de **Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{5}$$

6. Discutir según el parámetro y resolver cuando sea posible, el sistema $\begin{cases} 2x + y + az = 4 \\ x + y + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Solución:

El sistema se define por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^*$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas sea compatible determinado es que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema sea distinta de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a$$

Discusión

I. Sí $a \neq 2 \Rightarrow |A^*| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Solución por el método de **Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\cdot(2-a)}{2-a} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

Para cualquier valor de a excepto para a = 2, la solución es (2, 0, 0).

II. Sí a = 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=E_3-2E_1]{E_2=E_2-E_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ y=0 \end{cases} \text{Sist. comp. Indet.}$$

3 incógnitas – 2 ecuaciones = 1 grado de indeterminación.

Tomando z como constante:

$$\left.\begin{matrix} x = 2-z \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{haciendo } z=\lambda \ \left\{\begin{matrix} x = 2-\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{matrix}\right\} \forall\lambda \in \Re$$

7. Discutir según el parámetro y resolver cuando sea posible, el sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1 \\ x + (a+1)y + z = a+3 \\ x + y + (a+1)z = 2a-4 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & a+1 & 2a-4 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^*$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 2 - 3\cdot(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 2 - 3a - 3 = a^3 + 3a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 + 3a^2 = 0 \rightarrow a^2(a+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 0; \quad a = 0 \\ a+3 = 0; \quad a = -3 \end{cases}$$

Discusión:

I. Sí $a \neq 0.-3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

II. Sí $a = 0 \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3=E_3-E_1]{E_2=E_2-E_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \text{ Sistema Incompatible.}$$

III. Si $a=-3 \rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=2 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=-10 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_1]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2=E_2+2E_1 \\ E_3=E_3-E_2}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -11 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3+E_2]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Sistema Incompatible.

8. Estudiar el sistema en función del parámetro y resolverlo cuando tenga más de una solución

$$\begin{cases} x-5y=0 \\ 4x-6y+2z=0 \\ 5x-4y+kz=0 \end{cases}$$

Solución:

Sistema homogéneo. Se caracteriza por se iguales las matrices de coeficientes y ampliada, ya que la ampliada se diferencia de la de coeficientes únicamente en una columna de ceros, por lo que los sistemas homogéneos siempre son compatibles.

$$RgA = RgA^* \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (Solución trivial}: x=y=z=0) \\ |A| = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatibe Indeterminado.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & -4 & k \end{pmatrix}; \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & -4 & k \end{vmatrix} = -6k-50+0-(0-20k-8) = 14k-42 = 14(k-3) = 0; \quad k=3$$

Discusión:

I. Sí $k \neq 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Solución trivial.

II. Sí $k=3 \rightarrow \begin{cases} x-5y=0 \\ 4x-6y+2z=0 \\ 5x-4y+3z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2=E_2-4E_1 \\ E_3=E_3-5E_1}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2=\frac{1}{2}E_2 \\ E_3=\frac{1}{3}E_3}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=E_3-E_2]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-5y=0 \\ 7y+z=0 \end{cases}$$

Solución:

$$S': \begin{cases} x-5y=0 \\ 7y+z=0 \end{cases} \qquad \text{nº de incógnitas} - \text{nº de ecuaciones} = 3 - 2 = 1$$

El sistema tiene un grado de indeterminación, para resolverlo hay que tomar una variable como constante y luego transformarla en un parámetro.

Tomando como constante la y el sistema queda resuelto.

$$\begin{cases} x = 5y \\ z = -7y \end{cases}$$

haciendo y $=\lambda$ se obtiene la solución paramétrica.

$$\left.\begin{array}{l} x=5\lambda \\ y=\lambda \\ z=-7\lambda \end{array}\right\}\forall\lambda\in\Re$$

9. Discutir según los valores del parámetro k el sistema: $\begin{cases} x+ky-kz=0 \\ 12x-(k+2)y-2z=0 \\ kx-2y+z=0 \end{cases}$

Solución:

Sistema homogéneo: Rg A = Rg A* $\Rightarrow$ Sistema compatible:

$$\text{Si}:\begin{cases} |A|\neq 0\Rightarrow \text{Compatible Determinado. Solución trivial.} \\ |A|=0\Rightarrow \text{Compatible Indeterminado.} \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 12 & -(k+2) & -2 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix}=\{\text{Sarrus}\}=-k^3-4k^2+11k-6\,.$$

$$|A|=0;\quad -k^3-4k^2+11k-6=0;\quad (k-1)^2(k+6)=0:\begin{cases} (k-1)^2=0 \\ k+6=0 \end{cases}$$

Discusión:

I. Sí $k\neq 1,-6\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Solución trivial.

II. Sí $k=1\rightarrow\begin{cases} x+y-z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 12 & -3 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{E_2=E_2-12E_1 \\ E_3=E_3-E_1}]{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -15 & 10 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \vdots & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[E_2=\frac{1}{5}E_2]{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \vdots & 0 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-E_2]{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

El sistema asociado a la matriz es:

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+2z=0 \end{cases}$ Sistema Compatible Indeterminado

nº de incógnitas – nº de ecuaciones = 3 – 2 = 1; el sistema tiene un grado de indeterminación.

III. Sí $k=-6\rightarrow\begin{cases} x-6y+6z=0 \\ 12x+4y-2z=0 \\ -6x-2y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -6 & 6 & \vdots & 0 \\ 12 & 4 & -2 & \vdots & 0 \\ -6 & -2 & 1 & \vdots & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[E_2=\frac{1}{2}E_2]{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -6 & 6 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ -6 & -2 & 1 & \vdots & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[E_3=E_3+E_2]{}\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -6 & 6 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-6y+6z=0 \\ 6x+2y-z=0 \end{cases}\rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

nº de incógnitas – nº de ecuaciones = 3 – 2 = 1; El sistema tiene un grado de indeterminación.