Modelo 2014. Problema 2A.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución.

Definición de variables.

$$x \equiv \text{número de pesqueros que repara el astillero}$$
$$y \equiv \text{número de yates que repara el astillero}$$

Restricciones.

- *Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones*
$$100x + 50y \le 1600$$
- *El astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros*
$$0 \le x \le 12$$
- *El astillero no acepta encargos de más de 16 yates.*
$$0 \le y \le 16$$

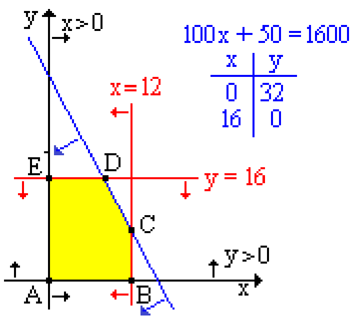
Función objetivo.

Maximizar los ingresos.

- *Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco.*
- *Coste de un pesquero = 100 × 500 = 50000 €*
- *Coste de un yate = 100 × 100 = 10000 €*
$$F(x, y) = 50000x + 10000y$$

Región factible.

Para seleccionar la región factible, se toma un punto cualquiera y se comprueba si cumple la inecuación. Tomo como punto de prueba el (0, 0)
$100x + 50y \le 1600 \xrightarrow{(0,0)} 100 \cdot 0 + 50 \cdot 0 \le 1600 : \quad 0 \le 1600$ Se cumple, lo tanto la región factible es de la recta 100x + 50y = 1600 hacia el punto (0, 0).



Vértices

- $A(0, 0)$
- $B(12, 0)$
- $C: \begin{cases} x = 12 \\ 100x + 50y = 1600 \end{cases} \Rightarrow C(12, 8)$
- $D: \begin{cases} y = 16 \\ 100x + 50y = 1600 \end{cases} \Rightarrow D(8, 16)$
- $E(0, 16)$

Optimación.

	x	y	F(x, y) = 50000x+10000y
A	0	0	0
B	12	0	600 000
C	**12**	**8**	**680 000**
D	8	16	560 000
E	0	16	160 000

Se obtiene un beneficio máximo de 680 000 € cumpliendo las restricciones propuestas, reparando 12 barcos pesqueros y 8 yates.

Septiembre 2012. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 € por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 € por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 € y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura.
Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución.

Variables:

$$x \equiv \text{Litros de pintura tipo 1}$$
$$y \equiv \text{Litros de pintura tipo 2}$$

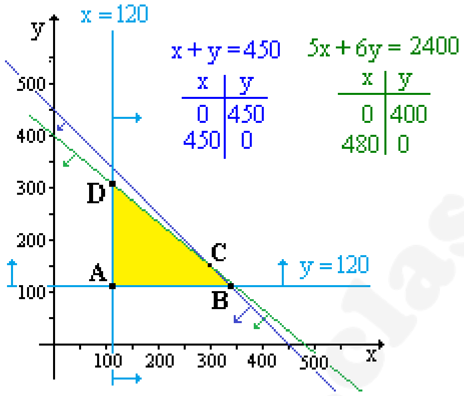
Función objetivo:

Superficie pintada S(x, y)) = 3x + 4y

Restricciones:

- *"puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos"* ≡ Emplea 10 minutos por cada Litro
  $$10x + 10y \le 75\times 60 \rightarrow x + y \le 450$$
- "El pintor dispone de un presupuesto de 480 €"
  $$1x + 1{,}2y \le 480 \rightarrow 5x + 6y \le 2400$$
- "debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura"
  $$x \ge 120;\ y \ge 120$$

Región factible y vértices:



Para determinar la región factible, se toma un punto cualquiera y se comprueba si las coordenadas del punto cumplen la restricción. Si se toma como punto de prueba el (0, 0):

$x + y \le 450 \xrightarrow{(0,0)} 0 + 0 \le 450$ Lo cumple.

$5x + 6y \le 2400 \xrightarrow{(0,0)} 0 + 0 \le 2400$ Lo cumple

$x \ge 120 \xrightarrow{(0,0)} 0 \ge 120$ No lo cumple

$y \ge 120 \xrightarrow{(0,0)} 0 \ge 120$ No lo cumple.

La región que cumple todas las restricciones es la región sombreada de amarillo.

Vértice A: $\begin{cases} x = 120 \\ y = 120 \end{cases} : A(120, 120)$

Vértice B: $\begin{cases} x + y = 450 \\ y = 120 \end{cases} : B(330, 120)$

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 450 \\ 5x + 6y = 2400 \end{cases} : C(300, 150)$

Vértice D: $\begin{cases} x = 120 \\ 5x + 6y = 2400 \end{cases} : D(120, 300)$

Optimación:

	x	y	F(x, y) = 3x + 4y
A	**120**	**120**	**840**
B	**330**	**120**	**1470**
C	**300**	**150**	**1500**
D	**120**	**300**	**1560**

Cumpliendo las restricciones propuestas, se consigue pintar una **superficie máxima de 1560 m^2** utilizando **120 L de pintura tipo 1 y 300 L de pintura tipo 2**.

Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir en dos tipos de fondos de inversión, *A* y *B*. El fondo de inversión del tipo *A* tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima. El fondo de inversión del tipo *B* tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión. El grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo *A*. ¿Qué cantidad debe invertir el grupo en cada tipo de fondo para obtener el máximo beneficio anual? Calcúlese dicho beneficio máximo.

Solución.

- **Definición de variables.**

x ≡ Capital en millones invertido en el fondo A; y ≡ Capital en millones invertido en el fondo B

- **Función objetivo.**

$$B(x, y) = \frac{4}{100} x \cdot 10^6 + \frac{3}{100} y \cdot 10^6$$

- **Restricciones**

- *"Un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir"*

$$x + y \le 9$$

- *"El fondo de inversión del tipo A tiene una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima"*

$$0 \le x \le 5$$

- *"En el fondo de inversión del tipo B deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión"*

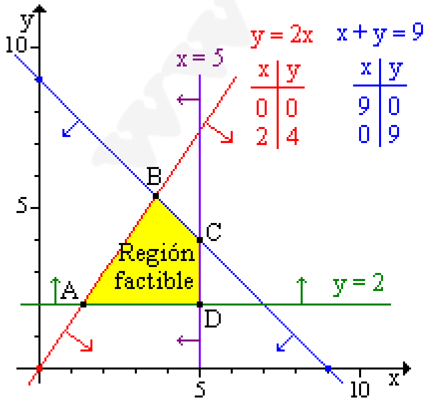
$$y \ge 2$$

- *"El grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A"*

$$y \le 2x$$

Se pide maximizar la función B(x, y) sometida a las siguientes restricciones:

- **Región factible. Vértices.**



x	y
0	0
2	4

x	y
9	0
0	9

Para seleccionar la región factible se toma un punto cualquiera que no pertenezca a ninguna de las rectas, por ejemplo P(1, 0) y se comprueba cuales restricciones lo cumplen, si lo cumple, la región donde esta el punto respecto de la restricción es la factible, si no lo cumple, será la contraria.

$$x + y \le 9 \xrightarrow{(1,0)} 1 \le 9 \text{ Lo cumple}$$

$$y \le 2x \xrightarrow{(1,0)} 0 \le 2 \text{ Lo cumple}$$

$$A = \begin{cases} y = 2x \\ y = 2 \end{cases} : (1, 2) \qquad B = \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 9 \end{cases} : (3, 6)$$

$$C = \begin{cases} x = 5 \\ x + y = 9 \end{cases} : (5, 4) \qquad C = \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} : (5, 2)$$

- **Optimación.**

	x	y	$B(x,y)=\frac{4}{100}x\cdot 10^6+\frac{3}{100}y\cdot 10^6$
A	1	2	100000
B	3	6	300000
C	**5**	**4**	**320000**
D	5	2	260000

Cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene **beneficio máximo de 320000 € invirtiendo 5 millones en bono tipo A y 4 millones en bono tipo B.**

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6 m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede suministrar más de 75 kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución.

Programación lineal.

- **Definición de variables.**

x ≡ kg pintura comprados al proveedor A   y ≡ ≡ kg pintura comprados al proveedor B

- **Función objetivo.**

$$F(x,y)=1\cdot x+1{,}2\cdot y=x+1{,}2y$$

- **Restricciones.**

i. “*Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2*”

$$6x + 8y \geq 480$$

ii. “*Ningún proveedor le puede suministrar más de 75 kg de pintura*”

$$0 \leq x \leq 75 \qquad 0 \leq y \leq 75$$

iii. “*El presupuesto máximo del pintor es de 120 euros*”

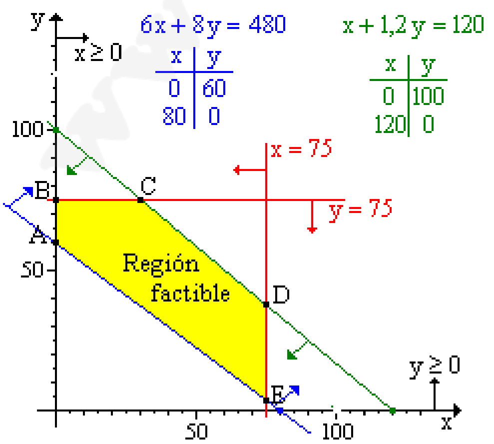
$$x + 1{,}2y \leq 120$$

iv. “Variables no negativas”

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Se pide minimizar F(x, y) = x + 1,2y con las siguientes restricciones: $\begin{cases} 6x+8y\geq 480 \\ x\leq 75\ ;\ \ y\leq 75 \\ x+1{,}2y\leq 120 \\ x\geq 0\ ;\ \ y\geq 0 \end{cases}$

- **Región factible. Vértices.**



$$A:\begin{cases} x=0 \\ 6x+8y=480 \end{cases}:A(0,60)$$

$$B:\begin{cases} x=0 \\ y=75 \end{cases}:B(0,75)$$

$$C:\begin{cases} x+1{,}2y=120 \\ y=75 \end{cases}:C(30,75)$$

$$D:\begin{cases} x+1{,}2y=120 \\ x=75 \end{cases}:D(75,37{,}5)$$

$$E:\begin{cases} x=75 \\ 6x+8y=480 \end{cases}:E(75,3{,}75)$$

Para seleccionar la región factible se toma el punto (0, 0) y se comprueba cuales restricciones lo cumplen, si lo cumple, la región donde esta el punto respecto de la restricción es la factible, si no lo cumple, será la contraria.

$6x + 8y \geq 480 \xrightarrow{(0,0)} 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \geq 480 : \ 0 \geq 480$ No se cumple

$x + 1{,}2y \leq 120 \xrightarrow{(0,0)} 0 + 1{,}2 \cdot 0 \leq 120 : \ 0 \leq 1280$ Se cumple

$x \leq 75 \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 75$ Se cumple

$y \leq 75 \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 75$ Se cumple

- **Optimación**.

	x	**y**	**F(x, y)**
A	0	60	72
B	0	75	90
C	30	75	120
D	75	37,5	120
E	75	3,75	79,5

El mínimo coste cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene comprando 60 kg de la pintura B, siendo el coste mínimo de 72 €.

Junio 2010. F.M. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de españoles, mientras que el impone total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800.000 euros la inversión total en fichajes extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de futbolistas españoles sea como mínimo de 500.000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho impone máximo. Justifíquese.

Solución.

- Definición de las variables.

  $x \equiv$ Dinero invertido en fichajes de jugadores españoles

  $y \equiv$ Dinero invertido en fichajes de jugadores extranjeros

- Función objetivo: Importe de las camisetas vendidas.

"el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de españoles (x) + el impone total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de extranjeros (y)"

$$F(x, y) = \frac{10}{100} x + \frac{15}{100} y$$

- Restricciones.

  i. *"El club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros"*

  $$x + y \leq 2\,000\,000$$

  ii. *"Los estatutos del club limitan a un máximo de 800.000 euros la inversión total en fichajes extranjeros"*

  $$y \leq 800\,000$$

  iii. *"Los estatutos exigen que la cantidad total invertida en fichajes de futbolistas españoles sea como mínimo de 500.000 euros"*

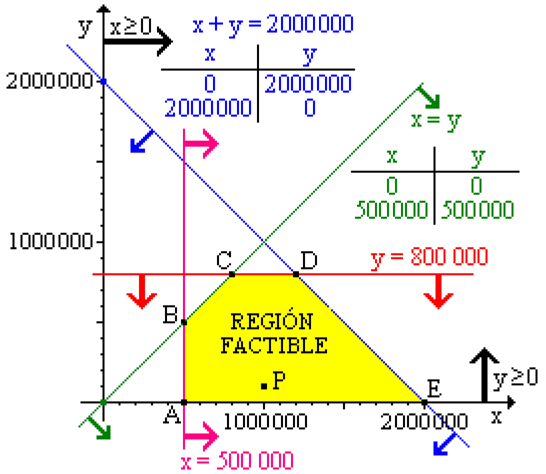
  $$x \geq 500\,000$$

  iv. *"La cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros"*

  $$x \geq y$$

v. *"Variables no negativas"*

$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$



- Región factible

  Para determinar la región factible tomo como punto de prueba el punto P (1 000 000, 100 000), comprobando que todas las inecuaciones lo cumplen.

- Vértices.

$$A: \begin{cases} y = 0 \\ x = 500\,000 \end{cases} : A = (500\,000, 0)$$

$$B: \begin{cases} x = y \\ x = 500\,000 \end{cases} : B = (500\,000, 500\,000)$$

$$C: \begin{cases} x = y \\ y = 800\,000 \end{cases} : C = (800\,000, 800\,000)$$

$$D: \begin{cases} x + y = 2\,000\,000 \\ y = 800\,000 \end{cases} : D = (1\,200\,000, 800\,000)$$

$$E: \begin{cases} x + y = 2\,000\,000 \\ y = 0 \end{cases} : E = (2\,000\,000, 0)$$

- Optimación.

Vértice	x	y	F(x, y)
A	500 000	0	50 000
B	500 000	500 000	125 000
C	800 000	800 000	200 000
D	**1 200 000**	**800 000**	**240 000**
E	2 000 000	0	200 000

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuesta se obtiene invirtiendo 1 200 000 € en fichajes nacionales y 800 000 € en fichajes extranjeros, obteniendo un beneficio máximo de 240 000 €.

Modelo 2010. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricado es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual 1000 euros. Calcúlense los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio de la empresa y determínese dicho beneficio máximo.

Solución.

Variables:

$x \equiv$ Número de centenas de metro de cable tipo A
$y \equiv$ Número de centenas de metro de cable tipo B

Datos: Para 100 metros de cada tipo de cable

	COBRE	**TITANIO**	**ALUMINIO**	**BENEFICIO**
TIPO A	10	2	1	1500
TIPO B	15	1	1	1000
MÁXIMOS OPERATIVOS	195 kg	20 kg	14 kg	

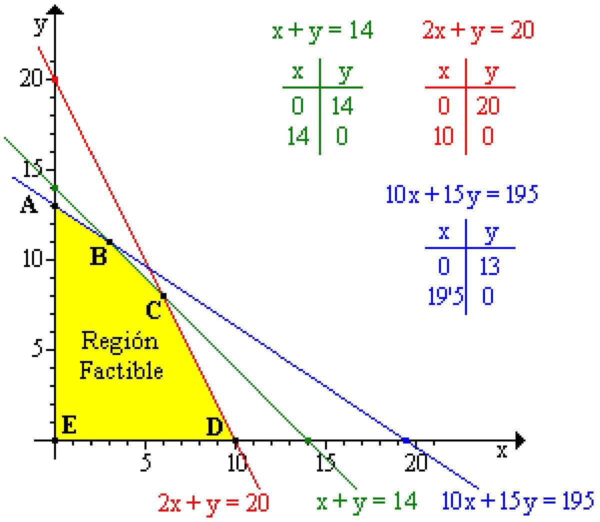
Función objetivo:

F(x, y) = 1500x + 1000y

Restricciones:

$10x + 15y \le 195$
$2x + y \le 20$
$x + y \le 14$
$x \ge 0;\ y \ge 0$

Región factible:



Las restricciones $x \ge 0$, $y \ge 0$, sitúan la región factible en el primer cuadrante. Si se toma (0, 0) como referencia, las tres inecuaciones restantes se cumplen $\left.\begin{cases} 10\cdot 0+15\cdot 0\le 195 \\ 2\cdot 0+0\le 20 \\ 0+0\le 14 \end{cases}\right\}$, por lo que la región factible queda delimitada por los vértices A, B, C, D y E de la figura.

Vértices:

- A = (0, 13)
- $B:\begin{cases} 10x+15y=195 \\ x+y=14 \end{cases}$ Solución : $\begin{cases} x=3 \\ y=11 \end{cases} \Rightarrow B=(3,11)$
- $C:\begin{cases} 2x+y=20 \\ x+y=14 \end{cases}$ Solución : $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow B=(6,8)$
- D = (10, 0)
- E = (0, 0)

Optimación:

Vértice	x	y	F(x, y) = 1500x + 1000y
A	0	13	13 000
B	3	11	15 500
C	**6**	**8**	**17 000**
D	10	0	15 000
E	0	0	0

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuestas es de 17000 €, obteniéndose con una producción de 600 m de cable tipo A y 800 m de cable tipo B

Septiembre 2009. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0.2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución.

- **Variables.** X ≡ m^2 de contrachapado tipo A; y ≡ m^2 de contrachapado tipo B.

- **Datos.**

	Horas de fabricación	Horas de barnizado	Beneficio

Tipo A	0,3	0,2	4
Tipo B	0,2	0,2	3
Máximos operativos	240	200	

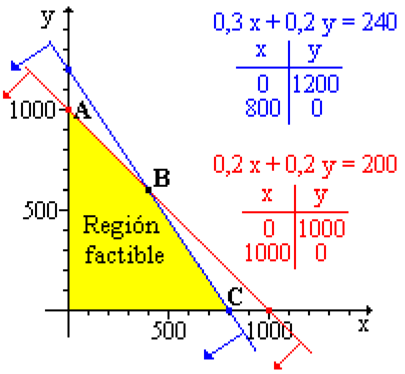
- **Función objetivo**.

$$F(x, y) = 4x + 3y$$

- **Restricciones**.

$$0{,}3x + 0{,}2y \le 240$$
$$0{,}2x + 0{,}2y \le 200$$
$$x \ge 0;\ y \ge 0$$

- **Región factible**.



Vértices: A = (0, 1000)

$$B: \begin{cases} 0{,}3x + 0{,}2y = 240 \\ 0{,}2x + 0{,}2y = 200 \end{cases} \quad B = (400, 600)$$

C = (800, 0)

- **Optimación** (máximo).

	x	y	F(x, y) = 4x+3y
A	0	1000	3000
B	**400**	**600**	**3400**
C	800	0	3200

Cumpliendo las restricciones del enunciado, se obtiene un **beneficio máximo de 3400 €** vendiendo **400 m^2 de contrachapado tipo A** y **600 m^2 de contrachapado tipo B**.

Junio 2009. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución.

Datos.

	Gasolina	fuel-oil	Precio (€/Tm)
A	0,1	0,35	350
B	0’05	0’55	400
Mínimos operativos	10	50	

Variables.

x ≡ Número de toneladas que se compran a la refinería A
y ≡ Número de toneladas que se compran a la refinería B

Función objetivo.

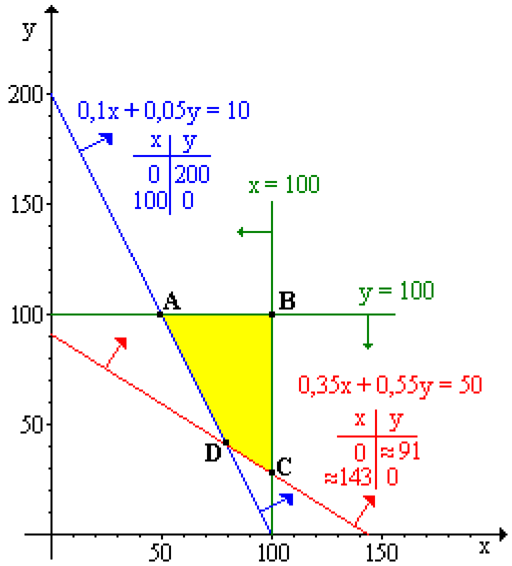
$$F(x, y) = 350x + 400y$$

Restricciones.

- $0{,}1x + 0{,}05y \ge 10$

- $0{,}35x + 0{,}55y \geq 50$
- $0 \leq x \leq 100$
- $0 \leq y \leq 100$

Región factible y vértices.



$$A: \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}05y = 10 \\ y = 100 \end{cases} : A = (50, 100)$$

$$B: \begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases} : B = (100, 100)$$

$$C: \begin{cases} x = 100 \\ 0{,}35x + 0{,}55y = 50 \end{cases} : C = (100, 27{,}3)$$

$$D: \begin{cases} 0{,}1x + 0{,}05y = 10 \\ 0{,}35x + 0{,}55y = 50 \end{cases} : D = (80, 40)$$

Optimación.

	x	**y**	**F(x, y)**
A	50	100	57500
B	100	100	75000
C	100	27,3	45920
D	**80**	**40**	**44000**

Se obtiene un precio mínimo de 44000 € comprando 80 Tm a la refinería A y 40 Tm a la refinería B.

Septiembre 2008. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Solución.

Variables.

$x \equiv$ Dinero invertido en bonos tipo A.

$y \equiv$ Dinero invertido en bonos tipo B.

Restricciones.

- “Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros”
$$x + y \leq 125000$$
- “En acciones tipo A es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros”
$$30000 \leq x \leq 81000$$
- “En acciones tipo B es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros”
$$y \geq 25000$$
- “La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A”
$$y \leq 3x$$
- Variables no negativas. $x \geq 0$; $y \geq 0$

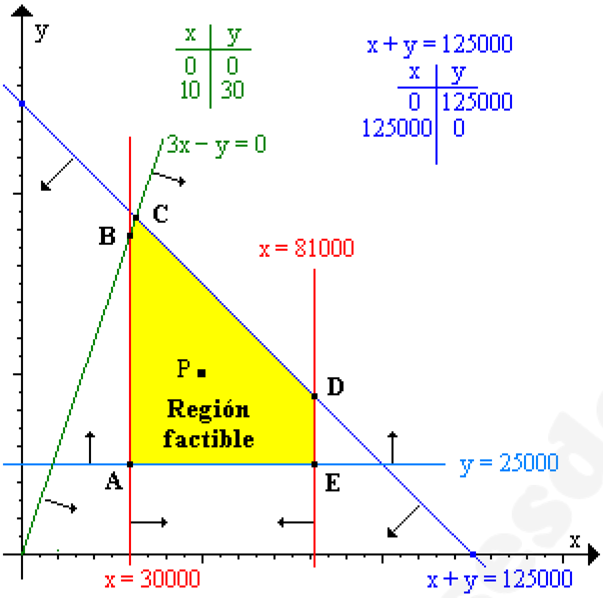
$$\text{Restricciones}:\begin{cases} x+y\le 125000 \\ 30000\le x\le 81000 \\ y\ge 25000 \\ 3x-y\ge 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{cases}$$

Función objetivo.

Ganancia máxima. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10%, las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5%.

$$F(x,y)=\frac{10}{100}x+\frac{5}{100}y$$

Región factible.



Para determinar la región factible se toma un punto cualquiera y se comprueba cuales restricciones cumple, la región que cumpla todas las restricciones es la región factible.
Tomando como punto P(50000, 50000):

$$P(50000,50000):\begin{cases} 50000+50000\le 125000 \ \text{La cumple} \\ 30000\le 50000\le 81000 \ \text{La cumple} \\ 50000\ge 25000 \ \text{La cumple} \\ 3\cdot 50000-50000\ge 0 \ \text{La cumple} \\ 50000\ge 0;\ 50000\ge 0 \ \text{La cumple} \end{cases}$$

Vértices.

- A = (30000, 25000)
- B: $\begin{cases} x=30000 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (30000, 90000)
- C: $\begin{cases} x+y=125000 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (31250, 93750)
- D: $\begin{cases} x+y=125000 \\ x=81000 \end{cases}$ (81000, 44000)
- E: (81000, 25000)

Optimación.

Vértice	x (€)	y (€)	F(x, y) = 0,1 x + 0,05 y
A	30000	25000	4250 €
B	30000	90000	7500 €
C	31250	93750	7812,5 €
D	**81000**	**44000**	**10300 €**
E	81000	25000	9350 €

Cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene un beneficio máximo de 10300 € invirtiendo 81000 € en acciones tipo A y 44000 € en acciones tipo B.

Junio 2008. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Solución.

- **Variables:**

x ≡ Toneladas de aceite compradas a la almazara A
y ≡ Toneladas de aceite compradas a la almazara B

- **Función objetivo:**

F (x, y) = 2000x + 3000y

- **Restricciones:**

Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda.

$$2 \le x \le 7$$
$$2 \le x \le 7$$

El distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas.

$$x + y \ge 6$$

El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B

$$x \le 2y$$

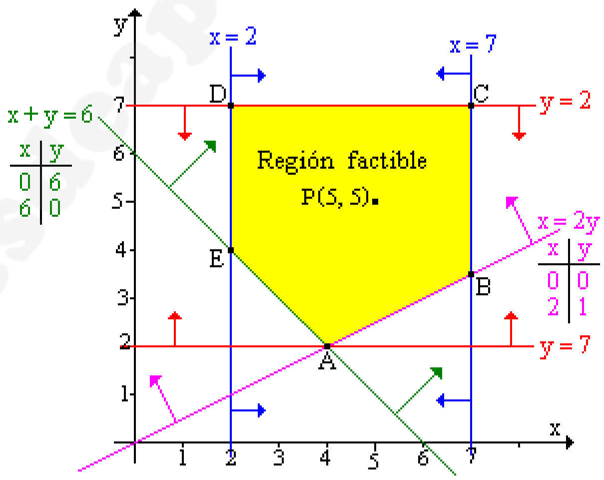
- **Región factible**

Está determinada por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x \le 2y \end{cases}$$

Una forma sencilla de encontrar la región factible es mediante un punto de prueba (5, 5), y comprobar si cumple o no las inecuaciones.

En este caso, el punto cumple todas las inecuaciones y nos permite definir la región factible.



- **Vértices.**

$$A:\begin{cases} x+y=6 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow (4,2) \qquad B:\begin{cases} x=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \left(7,\frac{7}{2}\right) \qquad C:\begin{cases} x=7 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow (7,7)$$

$$D:\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow (2,7) \qquad E:\begin{cases} x=2 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow (2,4)$$

- **Optimación.**

Vértice	x	y	F(x, y) = 2000x + 3000y
A	**4**	**2**	**2000·4 + 3000·2 = 14 000**
B	7	3’5	2000·7 + 3000·3’5 =24 500
C	7	7	2000·7 + 3000·7 = 35 000
D	2	7	2000·2 + 3000·7 = 25 000
E	2	4	2000·2 + 3000·4 = 16 000

Cumpliendo las restricciones propuestas, se obtiene un coste mínimo de 14 000 € comprando 4 toneladas a la almazara A y 2 a la B

Septiembre 2007. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indicar dicho beneficio.

Solución.

Variables. x ≡ nº de filas de clase preferente y ≡ nº de filas de clase turista

Restricciones. Se obtienen del enunciado.

"La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista"

$$2x + 1'5y \le 104$$

"La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente"

$$x \ge 3$$

"que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente"

$$y \ge 3x$$

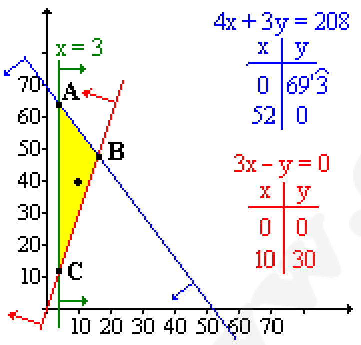
Ordenando y quitando decimales, el conjunto de restricciones es: $\begin{cases} 4x + 13y \le 208 \\ x \ge 3 \\ 3x - y \le 0 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

Función objetivo. Se obtienen del enunciado.

"Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente."

$$F(x, y) = 206x + 152y \text{ (máximo)}$$

Región factible-Vértices.



Si se toma (10, 40) como referencia, las tres inecuaciones se cumplen $\begin{Bmatrix} 4\cdot 10 + 3\cdot 40 \le 195 \\ 10 \ge 20 \\ 3\cdot 10 - 40 \le 0 \end{Bmatrix}$, por lo que la región factible queda delimitada por los vértices A, B, y C de la figura.

A: $\begin{cases} x = 3 \\ 4x + 3y = 208 \end{cases} (3, 65'\widehat{3})$ B: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + 3y = 208 \end{cases} (16, 48)$ C: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x = 3 \end{cases} (3, 9)$

Optimización.

	x	y	F(x, y)
A	3	65	10498 €
B	16	48	10592 €
C	3	9	1986 €

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene con 16 filas de preferente y 48 filas de turistas, ascendiendo el beneficio a 10498€

Junio 2007. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y uno de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de cable de tipo B, 1000 euros.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio máximo.

Solución.

Variables:

x ≡ Número de centenas de metro de cable tipo A

y ≡ Número de centenas de metro de cable tipo B

Datos: Para 100 metros de cada tipo de cable

	COBRE	TITANIO	ALUMINIO	BENEFICIO
TIPO A	10	2	1	1500
TIPO B	15	1	1	1000
MÁXIMOS OPERATIVOS	195 kg	20 kg	14 kg	

Función objetivo:

$F(x, y) = 1500x + 1000y$

Restricciones:

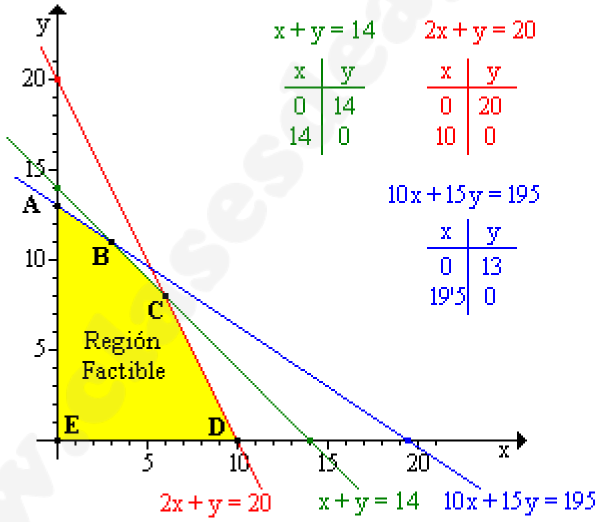
$10x + 15y \le 195$

$2x + y \le 20$

$x + y \le 14$

$x \ge 0;\ y \ge 0$

Región factible:



Las restricciones $x \ge 0$, $y \ge 0$, sitúan la región factible en el primer cuadrante. Si se toma (0, 0) como referencia, las tres inecuaciones restantes se cumplen $\left\{\begin{array}{c} 10\cdot 0+15\cdot 0\le 195 \\ 2\cdot 0+0\le 20 \\ 0+0\le 14 \end{array}\right\}$, por lo que la región factible queda delimitada por los vértices A, B, C, D y E de la figura.

Vértices:

- A = (0, 13)
- $B:\begin{cases}10x+15y=195\\ x+y=14\end{cases}$ Solución : $\begin{cases}x=3\\ y=11\end{cases} \Rightarrow B=(3,11)$
- $C:\begin{cases}2x+y=20\\ x+y=14\end{cases}$ Solución : $\begin{cases}x=6\\ y=8\end{cases} \Rightarrow B=(6,8)$
- D = (10, 0)
- E = (0, 0)

Optimación:

Vértice	x	y	F(x, y) = 1500x + 1000y
A	0	13	13 000
B	3	11	15 500
C	**6**	**8**	**17 000**
D	10	0	15 000
E	0	0	0

El máximo beneficio cumpliendo las restricciones propuestas es de 17000 €, obteniéndose con una producción de 600 m de cable tipo A y 800 m de cable tipo B

Septiembre 2006. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 Kg. de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 Kg. de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 Kg. y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Solución.

- Variables.
  - $x \equiv m^2$ de lámina fina.
  - $y \equiv m^2$ de lámina gruesa

- Datos.

	Kg. Material	Horas de trabajo	Beneficio
Fina	5	10	45 €
Gruesa	20	15	80 €
Valores Máximos	400	450	

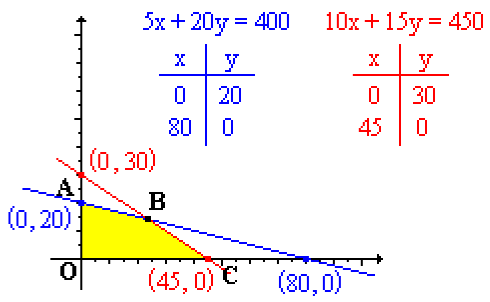
- Función objetivo.

$$F(x, y) = 45x + 80y$$

- Restricciones.

Material: $5x + 20y \le 400$
Horas: $10x + 15y \le 450$
Por definición: $x \ge 0,\ y \ge 0$

- Región Factible.



Las restricciones $x \ge 0$, $y \ge 0$, sitúan la región factible en el primer cuadrante. Si se toma (0, 0) como referencia, las dos inecuaciones restantes se cumplen $\begin{Bmatrix}5\cdot 0+20\cdot 0\le 400\\ 10\cdot 0+15\cdot 0\le 450\end{Bmatrix}$, por lo que la región factible queda delimitada como el cuadrilátero de la figura.

- Vértices:

Descartando el punto O por carecer de sentido práctico:

$$A=(0,120) \quad B:\begin{cases}5x+20y=400\\10x+15y=450\end{cases} \quad B=(24,14) \quad C=(45,0)$$

- Optimación

	x	y	F(x, y) = 45x + 80y
A	0	20	1.600
B	**24**	**14**	**2.200**
C	45	0	2.025

El máximo de la función objetivo cumpliendo las restricciones propuestas es de 2.200 €, y se obtiene con 24 m^2 de lámina fina y 14 m^2 de lámina gruesa

Junio 2006. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A Y B. Los lotes A están formados por 1 kg del papel reciclado y 3 kg de papel normal y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A Y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?

Solución.

Datos.

	Reciclado (kg)	Normal (kg)	Precio (€)
Tipo A	1	3	0’9
Tipo B	2	2	1
Máximos operativos (kg)	78	138	

Variables.

- $x \equiv$ Número de lotes tipo A
- $y \equiv$ Número de lotes tipo B

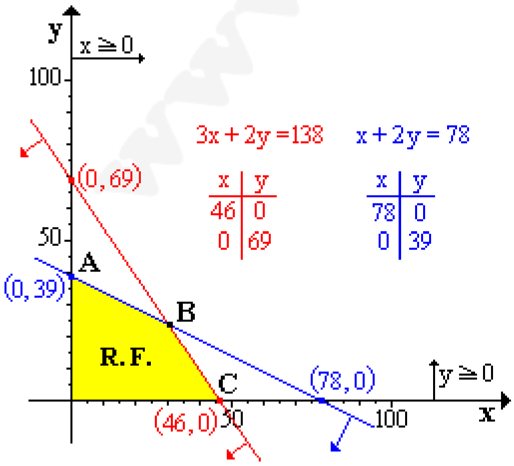
Restricciones.

$$\begin{cases}x+2y\le 78\\3x+2y\le 138\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$$

Función objetivo.

$$I(x,y)=0'9x+y$$

Región factible.



Para seleccionar la región factible se toma como punto de prueba el (0, 0).

$$\begin{cases}0+2\cdot 0\le 78 \Rightarrow \text{Se Cumple}\\3\cdot 0+2\cdot 0\le 138 \Rightarrow \text{Se Cumple}\end{cases}$$

Vértices de la región factible

$$\begin{cases}A=(0,39)\\B:\begin{cases}3x+2y=138\\x+2y=78\end{cases}:B=(30,24)\\C=(46,0)\end{cases}$$

Optimación

	x	y	I(x, y) = 0’9 + y
A	0	39	39
B	**30**	**24**	**51**
C	46	0	41’4

Se obtiene un **beneficio máximo de 51 €** cumpliendo las restricciones propuestas cuando se preparan **30 lotes tipo A y 24 lotes tipo B**

Modelo 2006. 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para él trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución.

Variables:

X ≡ nº de prendas tipo A

Y ≡ nº de prendas tipo B

DATOS:

	Trabajo Manual	Trabajo Maquina	Beneficio
Tipo A	30	45	20
Tipo B	60	20	17
Valor máximo	85×60	75×60	

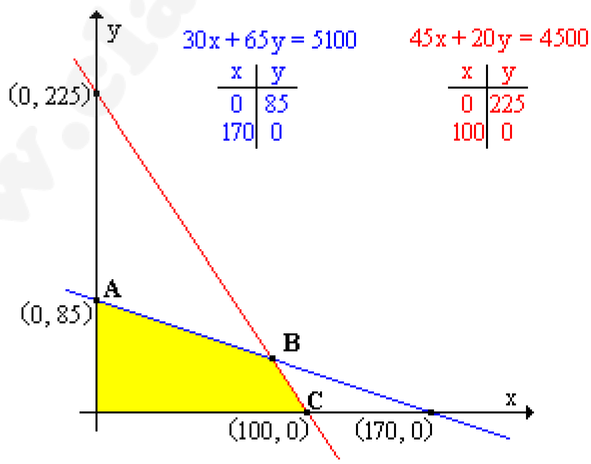
Función objetivo: Máximo beneficio.

$$F(x, y) = 20x + 17y$$

Restricciones:

$$x \ge 0;\ \ y \ge 0$$
$$30x + 60y \le 5100$$
$$45x - 20y \le 4500$$

Región factible:



Sustituyendo (0, 0) en las dos inecuaciones se observa que ambas se cumplen, por lo tanto la región factible es la que muestra la figura.

Vértices:

Descarta el punto A por no tener sentido social.

$$A = (0,85);\ \ B = \begin{cases} 30x + 60y = 5100 \\ 45x + 20y = 4500 \end{cases}:\ B = (80,45);\ \ C = (100,0)$$

Optimación:

	X	Y	$F(x, y) = 20x + 17y$
A	0	85	1445€
B	80	45	2365€
C	100	0	2000€

Se obtiene un beneficio máximo de 2365 €, cumpliendo las restricciones propuestas, fabricando 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B.

Septiembre 2005. Ejercicio 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
En una empresa de alimentación se dispone de 24 Kg. de harina de trigo y 15 Kg. de harina de maíz, que se utilizan pata obtener dos tipos de preparados: *A* y *B*. La preparación del preparado *A* contiene 200gr de harina de trigo y 300 gr. de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de *B* contiene 200 gr. de harina de trigo y 100 gr. de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

Solución.
Variables:

$x \equiv$ nº de raciones de preparado A.
$y \equiv$ nº de raciones de preparado B.

Datos:

	Harina de trigo	Harina de Maíz	Calorías
Preparado A	200 gr	300 gr	600
Preparado B	200 gr	100 gr	400
Valores Máximos	24 Kg	15 Kg	

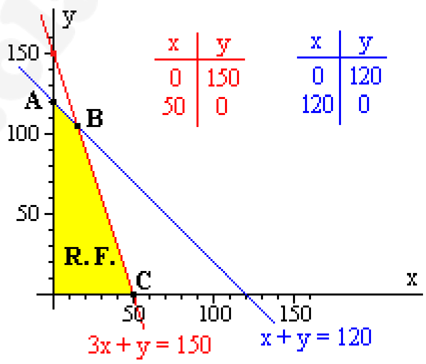
Función objetivo:

$$F(x, y) = 600x + 400y$$

Restricciones:

$$\begin{cases} 0'2x + 0'2y \le 24 \\ 0'3x + 0'1y \le 15 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \le 120 \\ 3x + y \le 150 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Región factible:



Las restricciones $x \ge 0$, $y \ge 0$, sitúan la región factible en el primer cuadrante. Si se toma (0, 0) como referencia, las dos inecuaciones restantes se cumplen $\begin{Bmatrix} 0 + 0 \le 120 \\ 3 \cdot 0 + 0 \le 150 \end{Bmatrix}$, por lo que la región factible queda delimitada como el cuadrilátero de la figura.

Vértices:

$$A: \begin{cases} x + y = 120 \\ x = 0 \end{cases} \quad A = (0, 120) \qquad B: \begin{cases} x + y = 120 \\ 3x + y = 150 \end{cases} \quad B = (15, 105) \qquad C: \begin{cases} 3x + y = 150 \\ y = 0 \end{cases} \quad C = (50, 0)$$

Optimación

	x	y	F(x, y) = 600x + 400y
A	0	120	48.000
B	**15**	**105**	**51.000**
C	50	0	30.000

El máximo de la función objetivo cumpliendo las restricciones propuestas es de 51.000 calorías, y se obtiene con 15 preparados tipo A y 105 preparados tipo B

Junio 2005. 1B. (puntuación máxima: 3 puntos).

Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿, Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtener dicho mínimo.

Solución.

Variables.

- x ≡ Número de envases pequeños
- y ≡ Número de envases grades

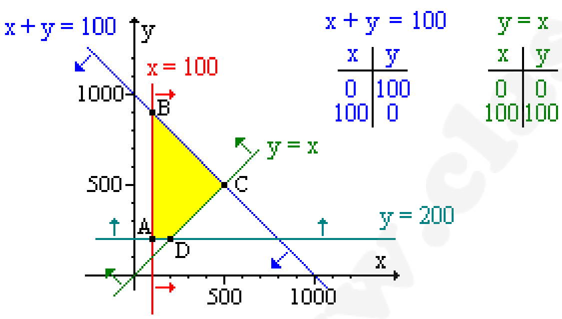
Restricciones.

$$\begin{cases} x + y \le 1000 \\ x \ge 100 \\ y \ge 200 \\ x \le y \end{cases}$$

Función objetivo.

$$G(x, y) = 10x + 20y$$

Región factible.



Vértices.

$A: \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases}$ $A = (100, 200)$

$B: \begin{cases} x = 100 \\ x + y = 1000 \end{cases}$ $B = (100, 900)$

$C: \begin{cases} x = y \\ x + y = 1000 \end{cases}$ $A = (500, 500)$

$D: \begin{cases} y = 200 \\ x = y \end{cases}$ $B = (200, 200)$

Optimación.

	x	y	G(x, y) = 10x + 20y
A	**100**	**200**	**5000**
B	100	900	19000
C	500	500	15000
B	200	200	6000

El Gasto de almacenaje mínimo cumpliendo las restricciones propuestas es de 50 € y se obtiene manteniendo un stock de 100 envase pequeños y 200 grandes

Modelo 2005. 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

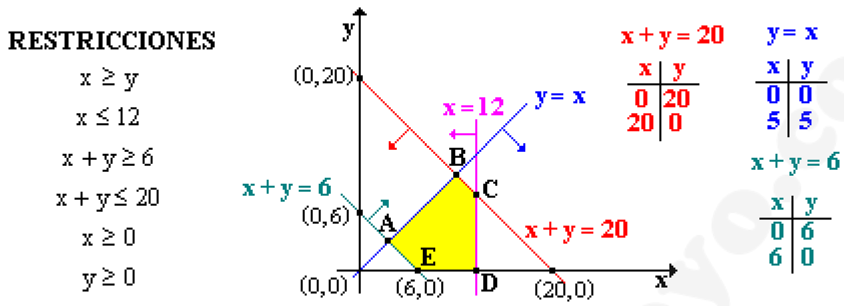
a) Expresar la función objetivo.
b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.
c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución.

a. $x \equiv$ nº de cruceros realizados por A; $y \equiv$ nº de cruceros realizados por B.

$$F(x, y) = 18.000x + 12.000y$$

b.



Vértices de la región factible:

$$A : \begin{cases} x + y = 6 \\ x = y \end{cases} \quad A = (3,3) \qquad C : \begin{cases} x + y = 20 \\ x = 12 \end{cases} \quad D = (12,8)$$

$$B : \begin{cases} x + y = 20 \\ x = y \end{cases} \quad E = (10,10) \qquad D : \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad C = (12,0)$$

$$E : \begin{cases} x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad B = (6,0)$$

c.

	x	**y**	**F (x, y)=18.000x+12.000y**
A	3	3	90.000
B	10	10	300.000
C	**12**	**8**	**312.000**
D	12	0	216.000
E	6	0	108.000

Con las restricciones propuesto el máximo beneficio es 312.000 €. Se consigue realizando 12 cruceros con el barco A y 8 con el barco B.

Septiembre 2004. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y esta formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1.500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

Solución.

- Variables

X ≡ Número de lotes tipo A
Y ≡ Número de lotes tipo B

- Datos

	Bañadores	Gafas	Gorros	Beneficio
Tipo A	1	1	1	8 €
Tipo B	2	1	–	10
Máximos	1600	1000	800	

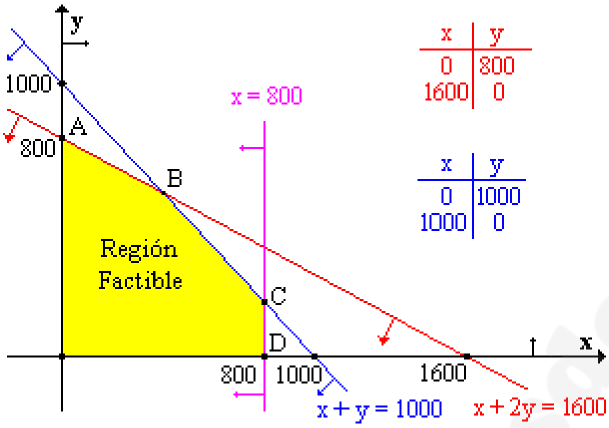
- Función objetivo

F (x, y) = 8x + 10y – 1500

- Restricciones

Bañadores: $x + 2y \le 1600$
Gafas: $x + y \le 1000$
Gorros: $x \le 800$
Variables: $x \ge 0,\ y \ge 0$

- Región factible



Para seleccionar la región factible, se prueba un punto cualquiera en cada inecuación, si la cumple, la región donde está el punto es la factible, si no la cumple, es la contraria. Por ejemplo, respecto de x < 800, el punto (0, 0), la cumple, por lo que la región factible es la que se encuentra de la recta x = 0 a la izquierda.

Los vértices de la región factible son:

$$A = (0, 800);\ B \equiv \begin{cases} x + y = 1000 \\ x + 2y = 1600 \end{cases} : B = (400, 600);\ C \equiv \begin{cases} x + y = 1000 \\ x = 800 \end{cases} : C = (800, 200);\ D = (800, 0)$$

No se tiene en cuenta el vértice (0, 0), por carecer de interés comercial.

- Optimación

	x	y	F(x, y) = 8x + 10y – 1500
A	0	800	6500
B	**400**	**600**	**7700**
C	800	200	6900
D	800	0	4900

El máximo beneficio cumpliendo todas las restricciones propuestas se obtiene vendiendo 400 lotes tipo A y 600 lotes tipo B, obteniéndose un beneficio máximo de 7700 €

Junio 2004. 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que 1’5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción ha de ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros, y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.

Solución.

Definición de variables:

- $x \equiv$ kg de A en la mezcla
- $y \equiv$ kg de B en la mezcla

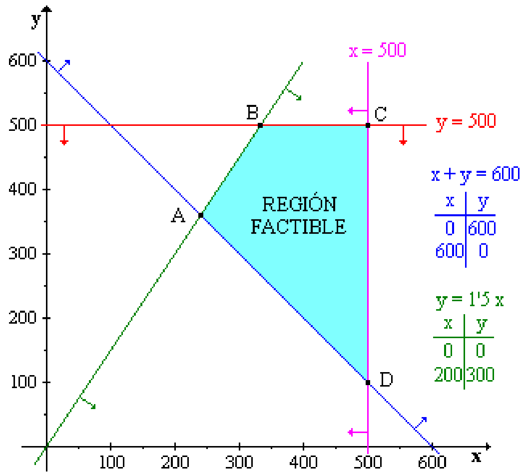
Función objetivo. Debe representa el coste de una mezcla de x kg de A e y kg de B.

- C (x, y) = 5x + 4y

Restricciones.

- $x \le 500$
- $y \le 500$
- $y \le 1'5x$
- $x + y \ge 600$
- $x > 0$, $y > 0$

Región factible.



Vértices.

- $A: \begin{cases} x + y = 600 \\ y = 1'5x \end{cases} \Rightarrow A = (240, 360)$
- $B: \begin{cases} y = 1{,}5x \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow B = (333'\hat{3}, 500)$
- $C: \begin{cases} x = 500 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow C = (500, 500)$
- $D: \begin{cases} x + y = 600 \\ x = 500 \end{cases} \Rightarrow D = (500, 100)$

Optimación

	x	y	C(x, y) = 5x + 4y
A	240	360	C(240, 360) = 5·240 + 4·360 = 2690 €
B	333	500	C(233, 500) = 5·333 + 4·500 = 3666 €
C	500	500	C(500, 500) = 5·500 + 4·500 = 5500 €
D	500	100	C(500, 100) = 5·500 + 4·100 = 2900 €

El mínimo coste mezclando ambos productos y cumpliendo las restricciones propuestas se obtiene con 240 kg de A y 360 kg de B, siendo el coste mínimo de 2690 €

Modelo 2004. 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del curso básico y entre 20 y 40 estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es 100. los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estima en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.

Solución.

Definición de variables:

- $x \equiv$ número de estudiantes en el curso básico.
- $y \equiv$ número de estudiantes en el curso avanzado.

Función objetivo:

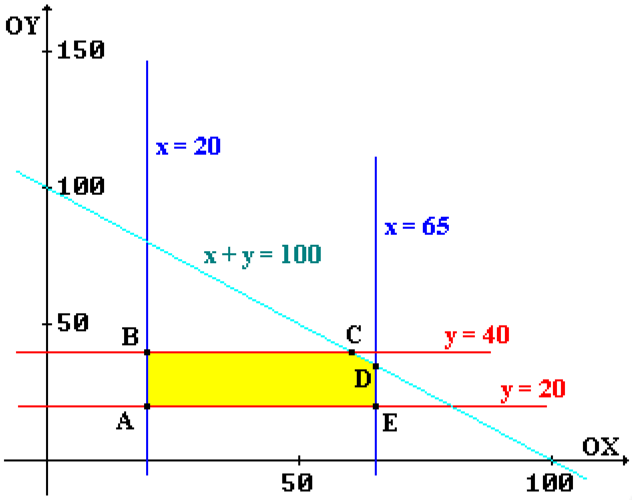
Se pide optimizar los beneficios que se obtienen por los cursos

$$B(x, y) = 145x + 150y$$

Restricciones que presenta la función de beneficios:

- $20 \le x \le 65 \rightarrow \begin{cases} x \ge 20 \\ x \le 65 \end{cases}$
- $20 \le y \le 40 \rightarrow \begin{cases} y \ge 20 \\ y \le 40 \end{cases}$
- $x + y \le 100$

Región factible



Vértices de la región factible:

$$A: \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \end{cases} \quad (20,20) \qquad B: \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \quad (20,40)$$

$$C: \begin{cases} y = 40 \\ x + y = 100 \end{cases} \quad (60,40) \qquad D: \begin{cases} x + y = 100 \\ x = 65 \end{cases} \quad (65,35)$$

$$E: \begin{cases} x = 65 \\ y = 20 \end{cases} \quad (65,20)$$

Optimación:

	X	**Y**	**B (x , y) = 145x + 150y**
A	20	20	5.900
B	20	40	8.900
C	60	40	14.700
D	65	35	14.675
E	65	20	12.425

La función de beneficio sometida a las restricciones propuesta se hace máxima con 60 alumnos en el curso básico y 40 alumnos en el curso avanzado.

Junio 2003. 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos).
Un vendedor quiere dar salida a 400kg de garbanzos, 300kg de lentejas y 250kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2kg de garbanzos, 2kg de lentejas y 1kg de judías y los de tipo B contiene 3kg de garbanzos, 1kg de lentejas y 2kg de judías. EL precio de venta de cada paquete es 25 euros para los de tipo A y de 35 euros para los de tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuanto asciende éste?

Solución.

Variables.

x ≡ Número de paquetes tipo A
y ≡ Número de paquetes tipo B

Datos:

	Garbanzos	**Lentejas**	**Judías**	**Precio**
Tipo A	2 kg	2 kg	1 kg	25 €
Tipo B	3 kg	1 kg	2 kg	35 €
Valor máximo	400 kg	300 kg	250 kg	

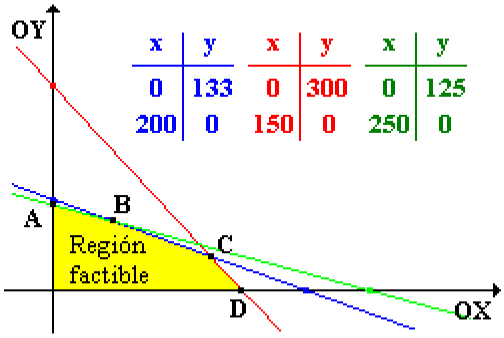
Función objetivo.

$B(x, y) = 25x + 35y$

Restricciones.

– Garbanzos: $2x + 3y \le 400$
– Lentejas: $2x + y \le 300$
– Judías: $x + 2y \le 250$
– $x , y \ge 0$

Región factible.



Vértices de la región factible.

$$-\text{ A: } \begin{cases} x+2y=250 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A=(0,125)$$

$$-\text{ B: } \begin{cases} 2x+3y=400 \\ x+2y=250 \end{cases} \Rightarrow B=(50,100)$$

$$-\text{ C: } \begin{cases} 2x+3y=400 \\ 2x+y=300 \end{cases} \Rightarrow C=(125,50)$$

$$-\text{ D: } \begin{cases} 2x+y=300 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A=(150,0)$$

Optimación.

	x	y	B (x, y) = 25x +35y
A	0	125	4.375
B	50	100	4.750
C	125	50	4.875
D	150	0	3.750

El beneficio máximo que cumple todas las restricciones se alcanza vendiendo 125 paquetes tipo A y 50 paquetes tipo B, siendo el beneficio máximo de 4.875 €

Junio 2002. 1A. (Puntuación máxima: 3 puntos).
Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 3300 euros para G1 y en 3500 euros para G2. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?
Solución.
Se plantea un ejercicio de programación lineal para minimizar los gastos de una empresa de asfaltado que debe de cumplir unos mínimos.

Variables: $x \equiv$ nº de semanas de trabajo de G1
$y \equiv$ nº de semanas de trabajo de G2

Datos:

	A	B	C	Coste
G1	3	2	2	3300
G2	2	3	2	3500
Mínimos	> 6	> 12	> 10	

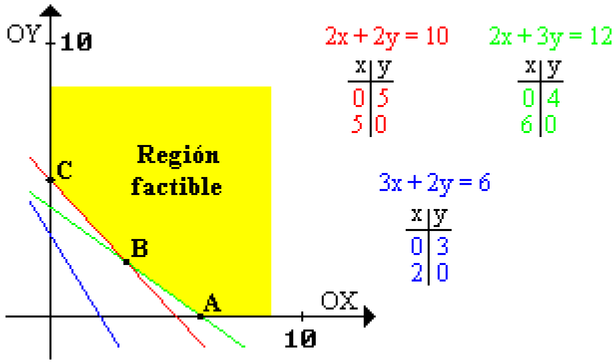
Función objetivo: G (x, y) = 3300x + 3500y

Restricciones: Zona A: $3x + 2y \geq 6$
Zona B: $2x + 3y \geq 12$

Zona C: $2x + 2y \geq 10$

Variables: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Región factible



Para determinar la región factible se toma un punto cualquiera y se sustituyen en las inecuaciones. Si la cumple el punto está en la región factible, si no, la región factible es la contraria. Tomando como punto de prueba (0, 0) se observa que ninguna desigualdad se cumple por lo que la región factible es hacia la dereha y hacia arriba (región amarilla).

Vértices de la región factible

$$A: \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (6,0)$$

$$B: \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \Rightarrow B = (3,2)$$

$$C: \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0,5)$$

Optimación

En los vértices de la región factible, se calcula el valor de la función objetivo, y por comparación se determinan los puntos de optimación.

	x	y	G(x, y) = 3300x + 3500y
A	6	0	19.800
B	3	2	16.900
C	0	5	17.500

Solución

Cumpliendo las restricciones propuestas, el gasto mínimo se obtiene trabajando el G1 3 semanas y el G2 2 semanas, siendo el gasto mínimo de 16.900 €

Junio 2001. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 pesetas y el de uno de gasolina es de 30 pesetas. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

(a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.
(b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.
(c) Resuélvase el problema.

Solución.

a. **Definición de variables:**

$x \equiv$ nº de bidones de petróleo.

$y \equiv$ nº de bidones de gasolina.

Función objetivo:

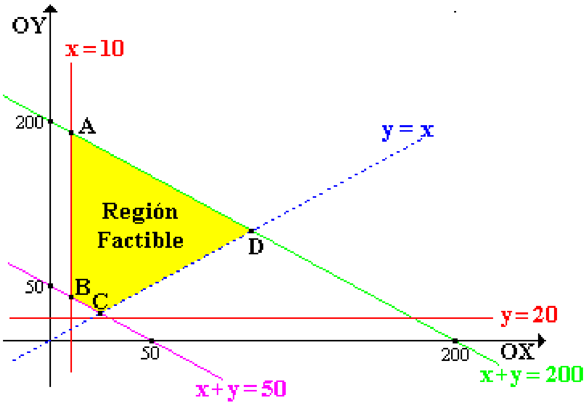
$$F(x, y) = 20x + 30y$$

Restricciones:

$x \geq 10$

$y \geq 20$
$x < y$
$x + y \leq 200$
$x + y \geq 50$

b. Representación gráfica



Vértices:

$$\text{- A}: \begin{cases} x = 10 \\ x + y = 200 \end{cases} (10, 190)$$

$$\text{- B}: \begin{cases} x = 10 \\ x + y = 50 \end{cases} (10, 40)$$

$$\text{- C}: \begin{cases} x = y \\ x + y = 50 \end{cases} (50, 50)$$

$$\text{- D}: \begin{cases} x = y \\ x + y = 200 \end{cases} (100, 100)$$

c. Optimación: Aunque la región presenta cuatro vértices, hay dos (C, D) que no cumplen una restricción (x < y), y por tanto no entran dentro de la optimación.

	x	Y	F(x, y) = 20x + 30y
A	10	190	5900
B	**10**	**40**	**1400**

Para que el gasto de almacenaje sea mínimo cumpliendo todas las restricciones se deberán almacenar diez barriles de petróleo y cuarenta barriles de gasolina.

Junio 2000. Ejercicio 1B. (Puntuación máxima 3 puntos)

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 2000 pesetas y 3000 pesetas por unidad, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:
El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.
Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
El material utilizado en cada mesa cuesta 400 pts. El utilizado en cada silla cuesta 200 pts. Cada operario dispone de 1.200 ptas diarias para material.

(a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.
(b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.
(c) Razónese si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.
(d) Resuélvase el problema.

Solución:

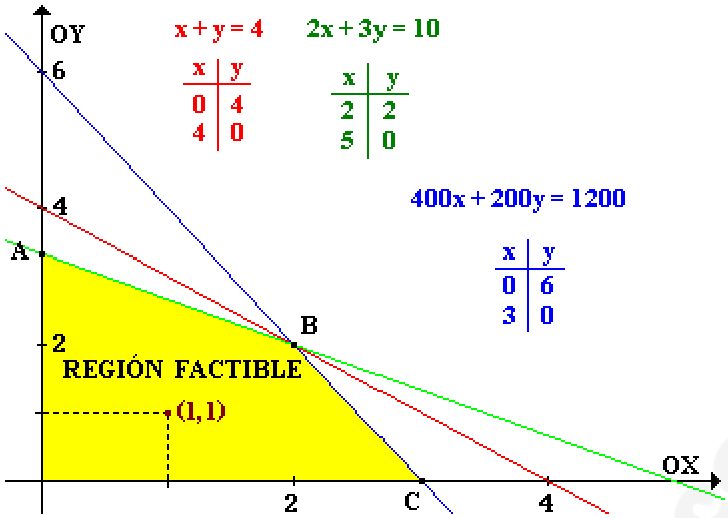
a. **Variables:**

- $x \equiv$ nº de mesas
- $y \equiv$ nº de sillas

Función objetivo:
$F(x, y) = 2000x + 3000y$

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 400x + 200y \leq 1200 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$

b. **Región factible:**



c. Puesto que el punto el punto (1, 1) pertenece a la región factible, un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, pero está situación no es muy favorable a la empresa.

d. Optimación:

	x	y	z=F(x,y)=2000x+3000y
A	0	$3'\widehat{3} \approx 3$	9000
B	2	2	10000
C	3	0	6000

El beneficio se obtiene produciendo 2 mesas y dos sillas.

Septiembre 1999. 1B (Puntuación 3 puntos) Una agencia de viajes vende paquetes turísticos para acudir a la final de un campeonato de fútbol. La agencia está considerando ofrecer dos tipos de viajes: El 1º de ellos (A) incluye desplazamiento en autocar para dos personas, una noche de alojamiento en habitación doble y cuatro comidas. El 2º (B) incluye desplazamiento en autocar para una persona, una noche de alojamiento en habitación también doble y dos comidas.
El precio de venta del paquete A es de 15.000 ptas. y el del paquete B es de 9.000 ptas. La agencia tiene contratadas un máximo de 30 plazas de autobús, 20 habitaciones dobles y 56 comidas. El número de paquetes del tipo B no debe superar al de los de tipo A. La empresa desea maximizar sus ingresos. Se pide:

a) Expresar la función del objeto.
b) Escribir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.
c) Determinar cuantos paquetes de cada tipo debe vender la agencia para maximizar sus ingresos. Calcular dichos ingresos.

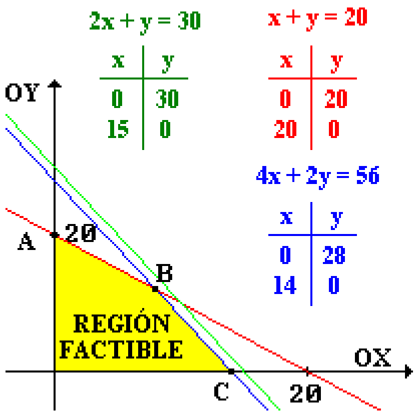
Solución

	PLAZAS AUTOCAR	PLAZAS DE ALOJAMIENTO	NÚMERO DE COMIDAS	
TIPO A	**2**	**1**	**4**	**15.000**
TIPO B	**1**	**1**	**2**	**9.000**
	30	**20**	**56**	

a) Función objetivo: F(x,y)=15.000x + 9.000y

b) Restricciones: $\begin{cases} x + y \le 30 \\ x + y \le 20 \\ 4x + 2y \le 56 \\ x \ge 0 : y \ge 0 \end{cases}$

Región factible



Vértices de la región factible

- A: $\begin{cases} x+y=20 \\ x=0 \end{cases} : A(0,20)$
- B: $\begin{cases} x+y=20 \\ 4x+2y=56 \end{cases} : B(8,12)$
- C: $\begin{cases} 4x+2y=56 \\ y=0 \end{cases} : C(14,0)$

Optimación

	x	y	F(x,y)=15.000x + 9.000y
A	0	20	180.000
B	8	12	228.000
C	14	0	210.000

El ingreso máximo es de 228.000 pts., y se obtiene vendiendo 8 paquetes tipo A y 12 paquetes tipo B.