CUESTIONES

1. Sean A y B dos sucesos con p(A)=0,5, p(B)=0,3 y p(A∩B)=0,1. Calcular las siguientes probabilidades

$$p\left(A/_{B}\right), p\left(A/_{A\cap B}\right), p\left(A\cap B/_{A\cup B}\right), p\left(A/_{A\cup B}\right).$$

Solución

- $p\left(A/_{B}\right)\overset{BAYES}{=}\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0'1}{0'3}=\dfrac{1}{3}$
- $p\left(A/_{A\cap B}\right)\overset{BAYES}{=}\dfrac{p(A\cap(A\cap B))}{p(A\cap B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$
- $p\left(A\cap B/_{A\cup B}\right)\overset{BAYES}{=}\dfrac{p((A\cap B)\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A\cup B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)+p(B)-p(A\cap B)}=$
  $=\dfrac{0'1}{0'5+0'3-0'1}=\dfrac{1}{7}$
- $p\left(A/_{A\cup B}\right)\overset{BAYES}{=}\dfrac{p(A\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\dfrac{p(A)}{p(A\cup B)}=\dfrac{p(A)}{p(A)+p(B)-p(A\cap B)}=\dfrac{0'5}{0'5+0'3-0'1}=\dfrac{5}{7}$

2. Sean A y B dos sucesos independientes de un cierto experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 1/6, Calcúlese p(A) y p(B).

Solución

La probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es le probabilidad de la intersección.

$$p(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es la probabilidad de la intersección de los complementarios ó contrarios.

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{6}$$

Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes, la intersección se transforma en el producto de las probabilidades.

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{3}$$

A la intersección de los contrarios le es aplicable la ley de Morgan

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=\frac{1}{6}:p(A\cup B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Teniendo en cuenta que los sucesos A y B son compatible ya que entre ellos existe intersección, la unión se calcula como:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=p(A)+p(B)-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}:p(A)+p(B)=\frac{7}{6}$$

La cuestión a quedado reducida a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases}p(A)\cdot p(B)=\dfrac{1}{3}\\ p(A)+p(B)=\dfrac{7}{6}\end{cases}$$

Resolviendo por sustitución:

$$p(A)=\frac{2}{3}\qquad p(B)=\frac{1}{2}$$

o viceversa

3. Sea A y B dos sucesos con P(A)=0'3, P(B)=0'7 y P(A∩B)=0'1. Se pide calcular las siguientes probabilidades: $p(\overline{A})$, $p(\overline{A}\cap\overline{B})$, $p(\overline{A}\cup\overline{B})$, $p(A\cap\overline{B})$.

Solución

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0'3 = 0'7$
- $p(\overline{A}\cap\overline{B}) \overset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) \overset{\text{COMPATIBLES}}{=} 1 - (p(A) + p(B) - p(A\cap B)) =$
  $= 1 - (0'3 + 0'7 - 0'1) = 0'1$
- $p(\overline{A}\cup\overline{B}) \overset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A\cap B}) = 1 - p(A\cap B) = 1 - 0'1 = 0'9$
- $p(A\cap\overline{B}) \underset{\text{DIFERENCIA}}{\overset{\text{SUCESO}}{=}} p(A) - p(A\cap B) = 0'3 - 0'1 = 0'2$

4. Sean A y B dos sucesos arbitrarios independientes con probabilidades respectivas p(A) y p(B). Se pide: Expresar en función de p(A) y p(B) la probabilidad del suceso $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

Solución

$$p\left((\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right) = p(\overline{A}\cup\overline{B}) \overset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A\cap B}) = 1 - p(A\cap B) \overset{\text{INDEPENDIENTES}}{=} 1 - p(A)\cdot p(B)$$

5. Siendo A y B sucesos incompatibles de un cierto espacio probabilístico tales que $p(A) = \frac{1}{5}$ y $p(B) = \frac{2}{5}$. Hallar $p(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Solución

$$p(\overline{A}\cap\overline{B}) \overset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) \underset{p(A\cap B)=0}{\overset{\text{INCOMPATIBLES}}{=}} 1 - (p(A) + p(B)) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

6. Sabiendo que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(\overline{B}) = \frac{2}{3}$ y $p(\overline{A}\cup\overline{B}) = \frac{3}{4}$, calcular:

a. $p(A\cap B)$
b. $p(B/A)$
c. $p(A/B)$

Solución

a. A partir de $p(\overline{A}\cup\overline{B})$ y conocidos $p(A)$ y $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, se puede calcular $p(A\cap B)$

$$p(\overline{A}\cup\overline{B}) \overset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A\cap B}) = 1 - p(A\cap B) = \frac{3}{4}$$

$$p(A\cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b. $$p(B/A) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{p(B\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c. $$p\left(\overline{A}/B\right) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)} = \left\{p(\overline{A}\cap B) = p(B) - p(A\cap B)\right\} = \frac{p(B) - p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

7. Sabiendo que p(A)=0'4; p(B)=0'5 y p(A∩B)=0'3, calcular:

a. $p\left(\overline{A}\cup B\right)$

b. $p\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)$

c. $p\left(\overline{A}\cup \overline{B}\right)$

donde $\overline{A}$ representa el suceso contrario ó complementario de A.

Solución

a. $p\left(\overline{A}\cup B\right)\underset{\text{DIFERENCIA}}{\overset{\text{SUCESO}}{=}} p(B)-p(A\cap B)=0'5-0'3=0'2$

b. $p\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)\overset{\text{MORGAN}}{=} p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)\underset{p(A\cap B)\neq 0}{\overset{\text{COMPATIBLES}}{=}} 1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=0'4$

c. $p\left(\overline{A}\cup \overline{B}\right)\overset{\text{MORGAN}}{=} p\left(\overline{A\cap B}\right)=1-p(A\cap B)=1-0'3=0'7$

8. Sean A y B sucesos independientes tales que p(A) = 0'15 y p(B) = 0'5. Calcular las siguientes probabilidades condicionadas:

a) $p\left(A/_{A\cap B}\right)$

b) $p\left(A/_{A\cup B}\right)$

c) $p\left(B/_{A\cap \overline{B}}\right)$

d) $p\left(A\cap B/_{A\cup B}\right)$

Solución

a. $$p\left(A/_{A\cap B}\right)\overset{\text{BAYES}}{=}\frac{p(A\cap(A\cap B))}{p(A\cap B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$$

b. $$p\left(A/_{A\cup B}\right)\overset{\text{BAYES}}{=}\frac{p(A\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\{A\cap(A\cup B)=A\}=\frac{p(A)}{p(A\cup B)}\overset{\text{COMPATIBLES}}{=}$$

$$=\frac{p(A)}{p(A)+p(B)-p(A\cap B)}\overset{\text{INDEPENDIENTES}}{=}\frac{p(A)}{p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B)}=\frac{0'15}{0'15+0'5-0'15\cdot 0'5}=\frac{1}{45}$$

c. $$p\left(B/_{A\cap \overline{B}}\right)\overset{\text{BAYES}}{=}\frac{p\left(B\cap\left(A\cap\overline{B}\right)\right)}{p\left(A\cap\overline{B}\right)}=\left\{B\cap\left(A\cap\overline{B}\right)=0\right\}=\frac{0}{p\left(A\cap\overline{B}\right)}=0$$

b. $$p\left(A\cap B/_{A\cup B}\right)\overset{\text{BAYES}}{=}\frac{p((A\cap B)\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cup B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A)+p(B)-p(A\cap B)}=$$

$$\overset{\text{INDEPENDIENTES}}{=}\frac{p(A)\cdot p(B)}{p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B)}=\frac{0'15\cdot 0'5}{0'15+0'5-0'15\cdot 0'5}=\frac{3}{23}$$

9.

a) Si A y B son dos sucesos incompatibles con p(A) = 0'3 y p(B) = 0'5, hallar $p(A^c\cap B^c)$

b) Si *A* y *B* son dos sucesos cualesquiera con p(A) = 0,4 y p(B) = 0,7, determinar los valores máximo y mínimo que puede tomar P(A ∩ B)

.(A^c indica el suceso contrario o complementario de A).

Solución

a. $p\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)\overset{\text{MORGAN}}{=} p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)\overset{\text{INCOMP}}{=}1-\left[p(A)+p(B)\right]=0'2$

b. El máximo valor que puede llegar a tomar la intersección de dos sucesos, será el menor de ellos, y eso sucederá cuando el menor este totalmente incluido en el mayor. Para este caso:

$$p(A\cap B)_{max}=p(A)\Leftrightarrow A\subset B$$

El mínimo valor de la intersección será cero y corresponderá al caso de sucesos incompatibles

10. Sean A y B dos sucesos tales que p(A) = 0'25, $p\left(A/B\right)=0'25$ y $p\left(B/A\right)=0'5$. Calcular $p\left(\overline{A}/B\right)$

Nota.- La notación A^c representa el suceso complementario de A.

Solución

11. Se tienen tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, con p(A)=0'7, p(B)=0'6, p(C)=0'1 y $p\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0'58$. Se pide:

a) ¿Son independientes?

b) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $P(A\cap C)$?.Para este valor, calcular $p(C^c/A^c)$.

$X^c \equiv$ complementario ó contrario de X

Solución:

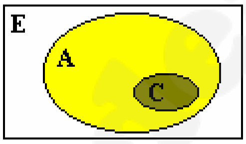
a) Condición de independencia: $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$

Teniendo en cuenta las leyes de Morgan:

$$p\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\overset{MORGAN}{=}p\left(\overline{A\cap B}\right)=1-p(A\cap B)=0'58\rightarrow p(A\cap B)=1-0'58=0'42$$

Como $p(A)\cdot p(B) = 0'7\times 0'6 = 0'42$ también, concluimos que los sucesos A y B son independientes.

b) $A\cap C$ corresponde al área comprendida entre A y C. Esta área crece a medida que los conjuntos están más solapados El caso más favorable (para que $A\cap C$ sea muy grande) ocurre cuando el solapamiento es máximo, es decir, cuando C (que es más pequeño que A) está completamente incluido en A.



En ese caso:

$$P(A\cap C) = p(C) = 0'1$$

Más rigurosamente, $A\cap C \subset C \Rightarrow p(A\cap C) \le p(C) = 0'1 \Rightarrow p(A\cap C) \le 0'1$, luego el valor máximo que puede tomar la $p(A\cap C)$ es 0'1

Para este valor de $p(A\cap C)=0'1=p(C)$, la situación de los sucesos es que C tiene que estar incluido en A. Entonces:

$$p\left(\overline{C}/\overline{A}\right)=\frac{p\left(\overline{C}\cap\overline{A}\right)}{p\left(\overline{A}\right)}\overset{MORGAN}{=}\frac{p\left(\overline{C\cup A}\right)}{1-p(A)}=\frac{1-p(C\cup A)}{1-p(A)}=\frac{1-\left(p(C)+p(A)-\overbrace{p(A\cap C)}^{p(C)}\right)}{1-p(A)}=\frac{1-p(A)}{1-p(A)}=1$$

PROBLEMAS

1. Un alumno hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es de 0'6. La probabilidad de que pase la segunda es de 0'8 y la de que pase ambas es de 0'5. Se pide

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.
b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
c) Son las pruebas sucesos independientes.
d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera

Solución

Suceso A ≡ Pasar la 1ª prueba
Suceso B ≡ Pasar la 2ª prueba.
DATOS: $p(A)=0'6$, $p(B)=0'8$, $p(A\cap B)=0'5$

a) $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'6+0'8-0'5 = 0'9$

b) $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) = 1 - 0'9 = 0'1$

c) $p(A\cap B) \neq p(A)\cdot p(B)$: $0'5\neq 0'6\cdot 0'8 \Rightarrow$ Sucesos dependientes.

d) $p\left(B/\overline{A}\right) = \dfrac{p(B\cap\overline{A})}{p(\overline{A})} = \dfrac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)} = \dfrac{0'8-0'5}{1-0'6} = \dfrac{3}{4}$

2. En una universidad, en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras, acaban la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30% ciencias y el 50% letras. Tomando un estudiante al azar, se pide;

a) probabilidad de que halla acabado la carrera y sea de ingeniería.
b) Nos dice que ha acabado la carrera. Probabilidad de que sea de ingeniería.

Solución

Sucesos: I≡Alumno de ingeniería; C≡Alumno de ciencias; L≡Alumno de letras; A≡Acabar la carrera.

Datos: $p(I) = 0'20$; $p(C) = 0'3$; $p(L) = 0'5$; $p\left(A/I\right) = 0'05$; $p\left(A/C\right) = 0'1$; $p\left(A/L\right) = 0'2$.

a) $p(A\cap I) = \{\text{sucesos dependientes}\} = p(I)\cdot p\left(A/I\right) = 0'2\cdot 0'05 = 0'01$

b) $p\left(I/A\right) = \dfrac{p(I\cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(I)\cdot p\left(A/I\right)}{p[(I\cap A)\cup(C\cap A)\cup(L\cap A)]} = \dfrac{p(I)\cdot p\left(A/I\right)}{p(I\cap A)+p(C\cap A)+p(L\cap A)} =$

$$\frac{p(I)\cdot p\left(A/I\right)}{p(I)\cdot p\left(A/I\right)+p(C)\cdot p\left(A/C\right)+p(L)\cdot p\left(A/L\right)} = \frac{0'2\cdot 0'05}{0'2\cdot 0'05+0'3\cdot 0'1+0'5\cdot 0'2} = \frac{0'01}{0'14} = 0'0714$$

Tomando como base de cálculo 100 alumnos de esta universidad, se obtienen los siguientes subconjuntos a partir de los datos de problema :

	INGENIERIA	CIENCIAS	LETRAS	
ACABAR	20×0'05=**1**	30×0'1=**3**	50×0'2=**10**	1+3+10=**14**
NO ACABAR	20–1=**19**	30–3=**27**	50–10=**40**	19+27+40=**86**
	20	30	50	**100**

Se responde a las preguntas del problema teniendo en cuenta la definición axiomática de probabilidad.

a) $p(A) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \dfrac{\text{Han acabado la carrera y son ingenieros}}{\text{Alumnos de la Universidad}} = \dfrac{1}{100}$

b) $p(B)=\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}=\dfrac{\text{Han acabado la carrera y son ingenieros}}{\text{Han acabado la carrera}}=\dfrac{1}{14}$

3. Se tienen tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, con P(A)=0'7, P(B)=0'6, P(C)=0'1 y $P(A^cUB^c)$=0'58. Se pide:

c) ¿Son independientes?

d) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $P(A\cap C)$?.Para este valor, calcular $p(C^c/A^c)$.

$X^c \equiv$ complementario ó contrario de X

Solución:

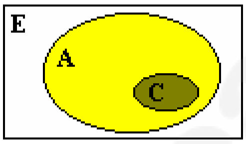
c) Condición de independencia: $\mathbf{p(A\cap B) = p(A)\times p(B)}$

Teniendo en cuenta las leyes de Morgan:

$$p(A\cap B) = 1 - p[(A\cap B)^c] = 1 - p(A^cUB^c) = 1 - 0'58 = 0'42$$

Como $p(A)\cdot p(B) = 0'7\times 0'6 = 0'42$ también, concluimos que los sucesos A y B son independientes.

d) $A \cap C$ corresponde al área comprendida entre A y C. Esta área crece a medida que los conjuntos están más solapados El caso más favorable (para que $A\cap C$ sea muy grande) ocurre cuando el solapamiento es máximo, es decir, cuando C (que es más pequeño que A) está completamente incluido en A.



En ese caso:

$$P(A\cap C) = p(C) = 0'1$$

Más rigurosamente, $A\cap C \subset C \Rightarrow p(A\cap C) \leq p(C) = 0'1 \Rightarrow p(A\cap C) \leq 0'1$, luego el valor máximo que puede tomar la $p(A\cap C)$ es 0'1

Para este valor de $p(A\cap C)=0'1=p(C)$, la situación de los sucesos es que C tiene que estar incluido en A. Entonces,

$$p(C^c/A^c) = p(C^c\cap A^c)/p(C^c) = p(A^c)/p(A^c) = 1$$

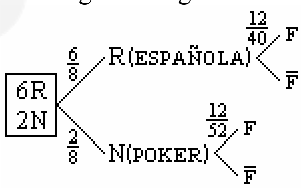
4. Una urna contiene 6 bolas rojas y 2 negras. Disponemos además de una baraja española y de una baraja de póquer. Extrae una bola al azar. Si es roja extraiga una carta de la baraja española. Si es negra de la de póquer.

a) Calcula la probabilidad de que la carta extraída sea figura.

b) Volvemos a jugar. La carta extraída ha sido figura ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?

Solución:

Sucesos: R≡Bola roja. N≡Bola negra. F≡Figura. $\overline{F}$ ≡No figura.



a) $p(F) = p[(R\cap F)\cup(N\cap F)] = p(R\cap F)+p(N\cap F) = p(R)\cdot p(F/R)+p(N)\cdot p(F/N) =$

$$=\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{40}+\frac{2}{8}\cdot\frac{12}{52}=\frac{147}{520}.$$

b) $$p(R/F)=\frac{p(R\cap F)}{p(F)}=\frac{p(R)\cdot p(F/R)}{p(R)\cdot p(F/R)+p(N)\cdot p(F/N)}=\frac{\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{40}}{\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{40}+\frac{2}{8}\cdot\frac{12}{52}}=\frac{39}{49}$$

17. (Puntuación máxima 2 puntos) Se toman 4 cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo en la mesa y se mezclan al azar. Determínese la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

Solución:

El ejercicio se puede realizar de dos formas diferentes:

Por la definición axiomática de probabilidad; $p(A)=\dfrac{\text{Casos favorables (Cardinal de A)}}{\text{Casos Posibles (Cardinal de E)}}$ calculando el número de elementos de A y E mediante la combinatoria(Permutaciones).

$$\text{Card (A)} = 2;\ \text{Card(E)} = P_4 = 4! = 24 \Rightarrow p(A)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

Como probabilidad condicionada, $p(5_I)\cdot p\left({5_{II}}/{5_I}\right)\cdot p\left({6_{III}}/{(5_I\cap 5_{II})}\right)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

20. (Puntuación máxima: 2 puntos). Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

A ≡ Se obtiene cinco en alguno de los dados.

B ≡ Se obtiene un doble (los dados presentan la misma puntuación)

a) $A\cap B$ b) $A\cup B$.

Solución:

Las probabilidades de los sucesos elementales p(A) y p(B), se calculan por la definición axiomática de probabilidad $p(A)=\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$

Se calculan a partir del espacio muestral (E). Card E(cardinal de A) = $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

A≡{1-5; 2-5; 3-5; 4-5; 5-5; 6-5;5-1;5-2;5-3;5-4;5-6}. Card A = 11

B≡{1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 5-5; 6-6}. Card B = 6

$$p(A)=\frac{11}{36} \qquad p(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

a) $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B) = 11/36\cdot 1/6 = 1/36$ por ser A y B sucesos independientes

b) $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$ por ser sucesos compatibles

Otra forma puede ser calculando los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$, a partir del espacio muestral y aplicando a continuación la definición axiomática.

$A\cap B$≡{5-5}. Card $(A\cap B) = 1$

$A\cup B$≡{1-5; 2-5; 3-5; 4-5; 5-5; 6-5; 1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 6-6}. Card $(A\cup B) = 11$

a) $p(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$

b) $p(A\cup B)=\dfrac{11}{36}$