

**Modelo 2014. Problema 4A.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es 0,6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25. Calcúlense:

- a)  $p(B)$    b)  $p(A \cap B)$    c)  $p(A)$    d)  $p(A \cup B)$

**Solución**

**DATOS:**

- La probabilidad de que no ocurra B es 0,6:  $p(\bar{B}) = 0,6$
- Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4:  $p(A/B) = 0,4$
- Si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25:  $p(B/A) = 0,25$

a.  $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$

b. Aplicando el teorema de Bayes a la probabilidad de A condicionado a B, se puede despejar la probabilidad de la intersección de A y B.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

c.  $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B/A)} = \frac{0,16}{0,25} = 0,64$

d.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,64 + 0,4 - 0,16 = 0,88$

**Modelo 2014. Problema 4B.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

En una determinada población, el 30% de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40% de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80% de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

- a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?
- b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

**Solución.**

**Sucesos:** A  $\equiv$  Iniciar una dieta con supervisión médica; B  $\equiv$  Abandonar la dieta en el primer mes

**Datos:**  $p(A) = 0,30$ ;  $p(\bar{B}) = 0,40$ ;  $p(B/\bar{A}) = 0,80$

a. Se pide: Probabilidad de “No haya tenido supervisión médica y haya abandonado la dieta”

$$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A}) = (1 - p(A)) \cdot p(B/\bar{A}) = (1 - 0,30) \cdot 0,80 = 0,56$$

$$p(\bar{A} \cap B) = 56\%$$

b. Se pide probabilidad de “abandonar la dieta antes del primer mes **si** ha tenido supervisión médica”

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Para calcular  $p(B \cap A)$  se puede recurrir a  $p(\bar{A} \cap B)$

$$p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = p(B) - p(\bar{A} \cap B) = (1 - p(\bar{B})) - p(\bar{A} \cap B)$$

$$p(A \cap B) = (1 - 0,40) - 0,56 = 0,04$$

Teniendo en cuenta que la intersección de sucesos es conmutativa ( $A \cap B = B \cap A$ )

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0,04}{0,30} = 0,1333$$

$$p(B/A) = 13,33\%$$

**Septiembre 2013. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40% de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

- a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.
- b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

**Solución.**

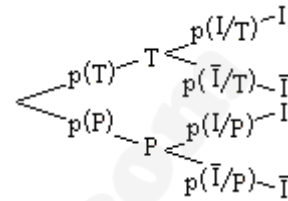
a. Para resolver el problema es conveniente definir los siguientes sucesos:

T ≡ El pasajero viaja en clase turista

P ≡ El pasajero viaja en clase preferente

I ≡ El pasajero sabe hablar inglés

El problema se puede representar en un diagrama en árbol, que nos puede ayudar a entender mejor los datos:



$$p(T) = \frac{2}{3} \quad p(P) = \frac{1}{3} \quad p(I/P) = 1 \quad p(\bar{I}/T) = 0,40$$

Teniendo en cuenta que los sucesos saber inglés si viaja en turista (I/T) y no saber inglés si viaja en turista ( $\bar{I}/T$ ) son complementarios,  $p(I/T) = 1 - p(\bar{I}/T) = 1 - 0,40 = 0,60$

Se pide:  $p(I) = p[(T \cap I) \cup (P \cap I)] = p(T \cap I) + p(P \cap I) = p(T) \cdot p(I/T) + p(P) \cdot p(I/P)$

$$p(I) = \frac{2}{3} \cdot 0,60 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15} = 0,7333 = 73,33\%$$

b. 
$$p(T/I) = \frac{p(T \cap I)}{p(I)} = \frac{p(T) \cdot p(I/T)}{p(I)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11} = 0,5455 = 54,55\%$$

**Septiembre 2013. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

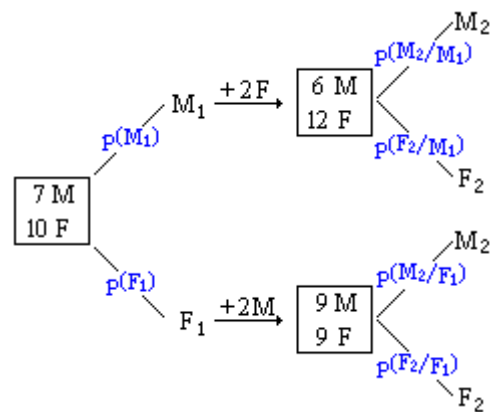
- a) El segundo caramelo sea de fresa.
- b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

**Solución.**

a. Si se define por  $M_i$  al suceso extraer un caramelo de menta en la extracción i, y por  $F_i$  al suceso extraer un caramelo de fresa en la extracción i, el problema se puede representar mediante el siguiente diagrama en árbol.

Probabilidades elementales:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(M_1) = \frac{7}{17} : \left\{ \begin{array}{l} p(M_2/M_1) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \\ p(F_2/M_1) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \end{array} \right. \\ p(F_1) = \frac{10}{17} : \left\{ \begin{array}{l} p(M_2/F_1) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \\ p(F_2/F_1) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Se pide:  $p(F_2) = p[(M_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2)] = p(M_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap F_2) = p(M_1) \cdot p(F_2/M_1) + p(F_1) \cdot p(F_2/F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{51}$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } p[(M_1 \cap M_2) \cup (F_1 \cap F_2)] &= p(M_1 \cap M_2) + p(F_1 \cap F_2) = \\
 &= p(M_1) \cdot p(M_2/M_1) + p(F_1) \cdot p(F_2/F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{22}{51}
 \end{aligned}$$

**Junio 2013. Problema 4A.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55% de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40% como deportistas y el 30% como lectores. Se elige un trabajador al azar:

- Calcúlese la probabilidad de que sea deportista y no sea lector.
- Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

**Solución.**

a. Se define los siguientes sucesos: A  $\equiv$  Deportista      B  $\equiv$  Lector

Datos:

- 55% de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores  $p(A \cup B) = 0,55$
- el 40% son deportistas  $p(A) = 0,40$
- el 30% son lectores  $p(B) = 0,30$

Se pide:  $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

La intersección se obtiene a partir de la unión:

$$\begin{aligned}
 p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) & p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\
 p(A \cap B) &= 0,40 + 0,30 - 0,55 = 0,15
 \end{aligned}$$

Conocida la intersección se calcula lo que se ha pedido.

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,40 - 0,15 = 0,25$$

$$\text{b. } p\left(\frac{A}{B}\right)^{\text{BAYES}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,15}{0,30} = 0,50$$

**Junio 2013. Problema 4B.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los atendidos por el sastre C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al B y el 15% restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

- Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.
- Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

**Solución.**

Sucesos:

- A  $\equiv$  El cliente es atendido por el sastre A
- B  $\equiv$  El cliente es atendido por el sastre B
- C  $\equiv$  El cliente es atendido por el sastre C
- S  $\equiv$  El cliente queda satisfecho.

Datos:

$$\begin{aligned}
 p(A) &= 0,55 & p(B) &= 0,30 & p(C) &= 0,15 \\
 p\left(\frac{\bar{S}}{A}\right) &= 0,05 & p\left(\frac{\bar{S}}{B}\right) &= 0,08 & p\left(\frac{\bar{S}}{C}\right) &= 0,10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a. } p(\bar{S}) &= p((A \cap \bar{S}) \cup (B \cap \bar{S}) \cup (C \cap \bar{S})) = p(A \cap \bar{S}) + p(B \cap \bar{S}) + p(C \cap \bar{S}) = \\
 &= p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{S}}{A}\right) + p(B) \cdot p\left(\frac{\bar{S}}{B}\right) + p(C) \cdot p\left(\frac{\bar{S}}{C}\right) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,30 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,10 = 0,0665 \\
 & \qquad \qquad \qquad p(\bar{S}) = 6,65\%
 \end{aligned}$$

$$b. \quad p\left(\frac{A}{\bar{S}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{S}}{A}\right)}{p(\bar{S})} = \frac{0,55 \cdot 0,05}{0,0665} = 0,4135$$

$$p\left(\frac{A}{\bar{S}}\right) = 41,35\%$$

**Modelo 2013. Problema 4A.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0,01, de que lo sea uno fabricado en B es 0,02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0,03: En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

- Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.
- Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

**Solución.**

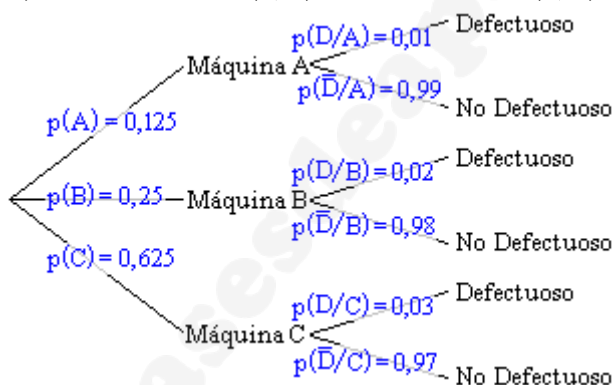
a. Se definen los siguientes sucesos:

A  $\equiv$  Tornillo fabricado por la máquina A                      B  $\equiv$  Tornillo fabricado por la máquina B  
C  $\equiv$  Tornillo fabricado por la máquina C                      D  $\equiv$  Tornillo defectuoso

Datos:

$$p(A) = \frac{15}{120} = 0,125 \quad p(B) = \frac{30}{120} = 0,25 \quad p(C) = \frac{75}{120} = 0,625$$

$$p(D/A) = 0,01 \quad p(D/B) = 0,02 \quad p(D/C) = 0,03$$



En este tipo de problemas, un diagrama en árbol ayuda a definir los datos.

Se pide:

$$p(D) = p((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)) = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) =$$

$$= p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C) = 0,125 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,625 \cdot 0,03 = 0,025$$

$$p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,025 = 0,975$$

$$p(\bar{D}) = 97,5\%$$

\*. Por ser los sucesos  $(A \cap D)$ ,  $(B \cap D)$  y  $(C \cap D)$  incompatibles, las uniones se transforman en sumas.

\*\* . Por ser dependientes los sucesos defectuoso y tipo de maquina que lo fabrica, la intersección se resuelve por el teorema de la probabilidad total.

$$b. \quad p(B/D) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B) \cdot p(D/B)}{p(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,02}{0,025} = 0,2$$

$$p(B/D) = 20\%$$

\*\*\*. Se aplica el teorema de Bayes

**Modelo 2013. Problema 4B.-** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que

$$p(A) = \frac{1}{2} \quad p(\overline{B}) = \frac{3}{4} \quad p(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

- a) Determinése si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.
- b) Determinése si son dependientes o independientes los sucesos A y B.

Nota:  $\overline{S}$  denota al suceso complementario del suceso S.

**Solución.**

a. Dos sucesos son compatibles cuando la intersección entre ellos es distinta al conjunto vacío. A y B serán compatibles si  $p(A \cap B) \neq 0$ , en caso contrario serán incompatibles.

Con los datos que se dan, la intersección se puede calcular a partir de la unión.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Despejando

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$

El único dato que falta es p(B), que se calcula mediante su complementario.

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo en la expresión se calcula la intersección de A y B.

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \neq 0$$

A y B son **compatibles**.

b. Si dos sucesos son independientes se debe cumplir:

$$p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$$

En el caso de no cumplirse, los sucesos serán dependientes.

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq p(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

A y B son **dependientes**.

**Septiembre 2012. Ejercicio 3A:** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

- (a) Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.
- (b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

**Solución.**

a. Si se definen los sucesos:

B ≡ Bola blanca

N ≡ Bola Negra

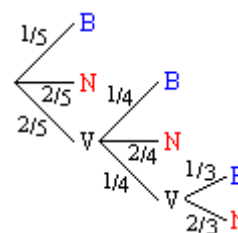
V ≡ Urna vacía

Una forma sencilla de entender el problema es mediante un diagrama en árbol.

Probabilidad de ganar:

$$\begin{aligned} p(\text{GANAR}) &= p(B \cup (V \cap B) \cup (V \cap V \cap B)) = p(B) + p(V \cap B) + p(V \cap V \cap B) = \\ &= p(B) + p(V) \cdot p(B/V) + p(V) \cdot p(V/V) \cdot p(B/V \cap V) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b. 
$$p(N/\overline{\text{GANAR}}) = \frac{p(N \cap \overline{\text{GANAR}})}{p(\overline{\text{GANAR}})} = \frac{p(N)}{1 - p(\text{GANAR})} = \frac{2/5}{1 - 1/3} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$



**Septiembre 2012. Ejercicio 3B:** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$p(A) = \frac{1}{3} \quad p(B/A) = \frac{1}{4} \quad p(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

- (a)  $p(A \cap B)$
- (b)  $p(B)$
- (c)  $p(\overline{B}/A)$
- (d)  $p(\overline{A}/\overline{B})$

Nota:  $\overline{S}$  denota el suceso complementario del suceso S.  $P(S|T)$  denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

**Solución.**

a. Teniendo en cuenta el teorema de la probabilidad total:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b. Del dato de la unión, conocidos  $p(A)$  y  $p(A \cap B)$ , se puede despejar  $p(B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(A)$$

$$p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

c. Aplicando Bayes:

$$p(\overline{B}/A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{B} \cap A \equiv \text{Solo A} = A - (B \cap A) \\ B \cap A = A \cap B \end{array} \right\} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$d. \quad p(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} \stackrel{\text{LEYES DE MORGAN}}{=} \frac{p(\overline{A \cup B})}{\text{COMPLEMENTARIO}} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

**Junio 2012. Ejercicio 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba a ha sido superada por el 80% de los alumnos del colegio A, el 90% de los del colegio B y por el 82% de los del colegio C.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?
- (b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

**Solución.**

a. Una forma sencilla de interpretar los datos del enunciado es mediante un diagrama en árbol.

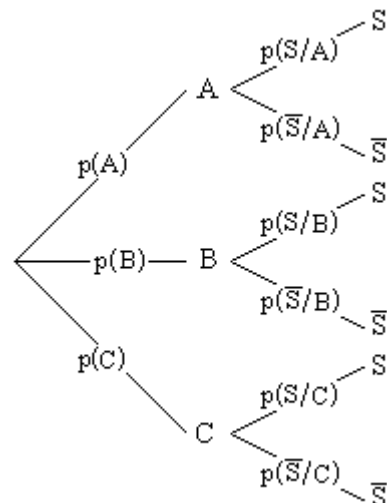
Sucesos:

- A  $\equiv$  Alumno perteneciente al colegio A.
- B  $\equiv$  Alumno perteneciente al colegio B.
- C  $\equiv$  Alumno perteneciente al colegio C.
- S  $\equiv$  El alumno ha superado la prueba.

Datos.

$$p(A) = \frac{80}{200} = 0,4 \quad ; \quad p(B) = \frac{70}{200} = 0,35 \quad ; \quad p(C) = \frac{50}{200} = 0,25$$

$$p(S/A) = 0,8 \quad ; \quad p(S/B) = 0,9 \quad ; \quad p(S/C) = 0,82$$



Se pide:

$$\begin{aligned}
 p(S) &= p[(A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)] = \\
 &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) = \\
 &= p(A) \cdot p(S/A) + p(B) \cdot p(S/B) + p(C) \cdot p(S/C) = \\
 &= 0,4 \cdot 0,8 + 0,35 \cdot 0,9 + 0,25 \cdot 0,82 = 0,84 \\
 p(S) &= 84\%
 \end{aligned}$$

- b. Se pide una probabilidad condicionada que se resuelve mediante el teorema de Bayes.

$$p(B/\bar{S}) = \frac{p(B \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{p(B) \cdot p(\bar{S}/B)}{1 - p(S)}$$

$$p(\bar{S}/B) = 1 - p(S/B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$p(B/\bar{S}) = \frac{0,35 \cdot 0,1}{1 - 0,84} = 0,2187 = 21,87\%$$

El problema también se puede resolver por un cuadro de contingencia.

|           | A                                 | B                                 | C                                 |                                  |
|-----------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| SUPERA    | $80 \times 0,80 =$<br><b>= 64</b> | $70 \times 0,90 =$<br><b>= 63</b> | $50 \times 0,82 =$<br><b>= 41</b> | $64 + 63 + 41 =$<br><b>= 168</b> |
| No SUPERA | $80 - 64 =$<br><b>= 16</b>        | $70 - 63 =$<br><b>= 7</b>         | $50 - 41 =$<br><b>= 9</b>         | $16 + 7 + 9 =$<br><b>= 32</b>    |
|           | <b>80</b>                         | <b>70</b>                         | <b>50</b>                         | Base de cálculo<br><b>200</b>    |

a.  $p(S) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{168}{200} = 0,84 = 84\%$

b.  $p(B/\bar{S}) = \frac{p(B \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{7}{32} = 0,2187 = 21,87\%$

**Junio 2012. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0,1 \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \quad p(A/B) = 0,5$$

Calcúlense:

- (a)  $p(B)$
- (b)  $p(A \cup B)$
- (c)  $p(A)$
- (d)  $p(\bar{B}/\bar{A})$

Nota:  $\bar{S}$  denota el suceso complementario del suceso S.  $p(S/T)$  denota la probabilidad el suceso S condicionada al suceso T.

**Solución.**

- a. Partiendo de  $p(A/B)$  y aplicando el teorema de Bayes se calcula  $p(B)$ .

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} : p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b. Partiendo de  $p(\overline{A} \cap \overline{B})$  y aplicando las leyes de Morgan, se calcula  $p(A \cup B)$ .

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

$$p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

c. Partiendo de  $p(A \cup B)$  se calcula  $p(A)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d. Se resuelve aplicando el teorema de Bayes.

$$p(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{p(\overline{B} \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{B})}{1 - p(A)} = \frac{0,6}{1 - 0,3} = \frac{0,6}{0,7} = 0,8571$$

### Modelo 2012. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra dos caras. Se elige al hacer una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutiva con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

#### Solución.

Probabilidad condicionada.

$$p = \frac{\text{Prob de lanzar con la moneda de dos cara}}{\text{Prob de obtener dos caras}} =$$

$$= \frac{\text{Prob de lanzar con la moneda de dos cara}}{\text{Prob de lanzar con la moneda de dos cara} + \text{Prob de obtener dos caras con la moneda con cara y cruz}}$$

$$p = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

### Modelo 2012. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)

Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años), alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

|                   | Pre-benjamín | Benjamín | Alevín | Total |
|-------------------|--------------|----------|--------|-------|
| Iniciación        | 120          | 70       | 10     | 200   |
| Perfeccionamiento | 40           | 90       | 150    | 280   |
| Total             | 160          | 160      | 160    | 480   |

Se elige al azar un nadador de la escuela.

- ¿Cuál es la probabilidad de que este en el curso de iniciación?
- ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?
- Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?
- Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

#### Solución.

Los datos que aparecen en el cuadro de contingencia, permite resolver los cuatro apartados utilizando únicamente la definición axiomática de probabilidad.

$$p(A) = \frac{\text{Número de casos favorables de A}}{\text{Número de casos totales}}$$



- a.  $p(\text{Iniciación}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ nadadores en el curso de iniciación}}{\text{n}^\circ \text{ total de nadadores}} = \frac{200}{280} = \frac{5}{7}$
- b.  $p(\text{perfeccionamiento o alevín}) = \frac{\text{perfeccionamiento} + \text{alevín} - \text{perfeccionamiento y alevín}}{\text{Totales}} = \frac{280 + 160 - 150}{480} = \frac{29}{48}$
- c.  $p\left(\frac{\text{perfeccionamiento}}{\text{benjamín}}\right) = \frac{\text{perfeccionamiento y benjamín}}{\text{benjamín}} = \frac{90}{160} = \frac{9}{16}$
- d.  $p\left(\frac{\text{benjamín}}{\text{iniciación}}\right) = \frac{\text{benjamín e iniciación}}{\text{iniciación}} = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}$

**Septiembre 2011. Ejercicio 3A: (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?  
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

**Solución.**

- a. Sucesos:  $A_n \equiv$  nace el niño enésimo;  $B_n \equiv$  nace la niña enésima.

$$p\left(\frac{A_1 \cap A_2}{A_2}\right) = \frac{p[(A_1 \cap A_2) \cap A_2]}{p(A_2)} = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p[(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap A_2)]} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2)}{p(A_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_2)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2)}{p(A_1) \cdot p(A_2) + p(B_1) \cdot p(A_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51 \cdot 0,51 + 0,49 \cdot 0,51} = 0,51$$

b. 
$$p\left(\frac{A_1 \cap A_2}{A_1 \cup A_2}\right) = \frac{p[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2)]}{p(A_1 \cup A_2)} = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(B_1 \cap B_2)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2)}{1 - p(B_1 \cap B_2)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2)}{1 - p(B_1) \cdot p(B_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{1 - 0,49 \cdot 0,49} = 0,34$$

**Septiembre 2011. Ejercicio 3B: (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1,2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?  
 b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

**Solución.**

- a. Sucesos: A  $\equiv$  Se escoge la urna A; B  $\equiv$  Se escoge la urna B; C  $\equiv$  Se escoge la urna C; D  $\equiv$  La bola extraída es blanca.

La probabilidad de escoger una urna depende del resultado del lanzamiento del dado, por lo tanto las probabilidades de escoger cada urna, teniendo en cuenta la definición axiomática de probabilidad son:

$$p(A) = \frac{3}{6}; \quad p(B) = \frac{1}{6}; \quad p(C) = \frac{2}{6}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca, depende de la urna de la que se haga la extracción.

$$p\left(\frac{D}{A}\right) = \frac{1}{3}; \quad p\left(\frac{D}{B}\right) = \frac{2}{3}; \quad p\left(\frac{D}{C}\right) = \frac{3}{6}$$

Se pide calcular  $p(D)$

$$p(D) = p((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)) = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D)$$

Para calcular las intersecciones hay que tener en cuenta que son sucesos dependientes, y por tanto se calcularán mediante el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) = p(A) \cdot p\left(\frac{D}{A}\right) + p(B) \cdot p\left(\frac{D}{B}\right) + p(C) \cdot p\left(\frac{D}{C}\right) = \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- b. Probabilidad condicionada, se aplica el teorema de Bayes.

$$p\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{p(C) \cdot p\left(\frac{D}{C}\right)}{p(D)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

### Junio 2011. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0'4, de molinos eólicos con probabilidad 0'26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0'12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

- por alguna de las dos instalaciones,
- solamente por una de las dos.

#### Solución.

- $A \equiv$  La energía es suministrada por placas solares,  $p(A) = 0'4$
- $B \equiv$  La energía es suministrada por molinos eólicos,  $p(B) = 0'26$
- $A \cap B \equiv$  La energía es suministrada por placas solares y por molinos eólicos,  $p(A \cap B) = 0'12$

- a. La energía es suministrada por placas solares **o** por molinos eólicos.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'4 + 0'26 - 0'12 = 0'54$$

- b. La energía es suministrada **solo** por placas solares **o solo** por molinos de viento

$$p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = \underbrace{p(A) + p(B) - p(A \cap B)}_{p(A \cup B)} - p(A \cap B) = p(A \cup B) - p(A \cap B)$$

$$p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cup B) - p(A \cap B) = 0,54 - 0,12 = 0,42$$

### Junio 2011. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0,5, de que sea un camión es 0,3 y de que sea una motocicleta es 0,2. La probabilidad que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0,06 para un coche, 0,02 para un camión y 0,12 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.

- Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.
- Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

#### Solución.

Sucesos y datos:

- $A \equiv$  Por el radar pasa un coche;  $p(A) = 0,5$
- $B \equiv$  Por el radar pasa un camión;  $p(B) = 0,3$
- $C \equiv$  Por el radar pasa una motocicleta;  $p(C) = 0,2$
- $S \equiv$  El vehículo que pasa por el radar supera la velocidad máxima permitida
- Probabilidad de superar la velocidad máxima si es un coche;  $p\left(\frac{S}{A}\right) = 0,06$

- Probabilidad de superar la velocidad máxima si es un camión;  $p(S/B) = 0,02$
- Probabilidad de superar la velocidad máxima si es una motocicleta;  $p(S/C) = 0,12$

a. Los vehículos que superan la velocidad máxima pueden ser coches, camiones o motos:

$$p(S) = p((A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) =$$

$$= p(A) \cdot p(S/A) + p(B) \cdot p(S/B) + p(C) \cdot p(S/C) = 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,12 = 0,06$$

b. Probabilidad de que el vehículo sea una motocicleta si ha superado la velocidad máxima.

$$p(C/S)_{\text{BAYES}} = \frac{p(C \cap S)}{p(S)} = \frac{p(C) \cdot p(S/C)}{p(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,12}{0,06} = 0,4$$

El problema también se puede resolver mediante un cuadro de contingencia y la definición de probabilidad. Para hacer el cuadro interesa tomar como base de cálculo un valor que genere números enteros, dicho valor se puede obtener por tanteo o, como mínimo común múltiplo de las fracciones generatrices de los productos  $0,5 \cdot 0,06$ ;  $0,3 \cdot 0,02$ ;  $0,2 \cdot 0,12$  ( $2^2 \cdot 5^3 = 500$ )

Si se toma como base de cálculo 500 vehículos que pasen por el radar, el 50% serán coches (250), el 30% camiones (150) y el 20% motocicletas (100). De los 250 coches que pasan por el radar, el 6% (15) superan la velocidad máxima, de los 150 camiones, el 2% (3) la superan y de las 100 motocicletas el 12% (12).

Estos datos quedan descritos en el siguiente cuadro:

|  | COCHE                                     | CAMIÓN                                    | MOTOCICLETA                               |                                   |
|--|---|---|---|-----------------------------------|
| <b>SUPERA <math>v_{\text{máx}}</math></b>    | $250 \cdot \frac{6}{100} = \mathbf{15}$   | $150 \cdot \frac{2}{100} = \mathbf{3}$    | $100 \cdot \frac{12}{100} = \mathbf{12}$  | $15 + 13 + 12 = \mathbf{30}$      |
| <b>NO SUPERA <math>v_{\text{máx}}</math></b> | $250 - 15 = \mathbf{235}$                 | $150 - 3 = \mathbf{147}$                  | $100 - 12 = \mathbf{88}$                  | $500 - 30 = \mathbf{470}$         |
|  | $500 \cdot \frac{50}{100} = \mathbf{250}$ | $500 \cdot \frac{30}{100} = \mathbf{150}$ | $500 \cdot \frac{20}{100} = \mathbf{100}$ | Base de cálculo<br>$\mathbf{500}$ |

a. Probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

$$p(S) = \frac{\text{n}^\circ \text{vehículos que superan } v_{\text{máx}}}{\text{n}^\circ \text{vehículos totales}} = \frac{30}{500} = 0,06$$

b. Si el vehículo ha superado la velocidad máxima, ¿probabilidad de que sea una motocicleta?

$$p(M/S) = \frac{p(M \cap S)}{p(S)} = \frac{\text{n}^\circ \text{ motos que superan } v_{\text{máx}}}{\text{n}^\circ \text{ vehículos que superan } v_{\text{máx}}} = \frac{12}{30} = 0,40$$

### Modelo 2011. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es de  $\frac{1}{6}$  y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a  $\frac{7}{12}$ . Se sabe además que  $p(A/B) = \frac{1}{2}$ .

- Calcular la probabilidad de que ocurra A ó B.
- Calcular la probabilidad de que ocurra A.

**Solución.**

a. Por el enunciado se sabe que la probabilidad de que ocurran a la vez es  $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ , además la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es  $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{12}$ .

Conocida esta última probabilidad y aplicando las leyes de Morgan, se obtiene la probabilidad de la unión.

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \frac{7}{12} \quad p(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

b. Conocido el valor de la probabilidad condicionada  $p(A/B)$  se puede calcular el valor de la  $p(B)$  por la teorema de Bayes:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Con el valor de la probabilidad de B se obtiene el valor de la probabilidad de A mediante la probabilidad de la unión.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad p(A) = p(A \cup B) - p(B) + p(A \cap B)$$

$$p(A) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

### Modelo 2011. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población:

- Calcular la probabilidad de que practique deporte regularmente.
- Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

#### Solución.

Sucesos  $A \equiv$  El habitante de la población sigue una dieta de adelgazamiento

$B \equiv$  El habitante de la población practica regularmente un deporte.

Datos

- “La probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2”  $p(A) = 0,2$
- “Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6”  $p(B/A) = 0,6$
- “Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3”  $p(B/\overline{A}) = 0,3$

a. “Probabilidad de que un individuo de la población practique deporte”  $p(B)$

$$p(B) = p((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(\overline{A}) \cdot p(B/\overline{A})$$

\* Los sucesos  $A \cap B$  y  $\overline{A} \cap B$  son incompatibles, no se pueden producir simultáneamente

\*\* Los sucesos A y B son dependientes, no es igual la probabilidad de B si se cumple A que si no se cumple A

$$p(B) = p(A) \cdot p(B/A) + (1 - p(A)) \cdot p(B/\overline{A}) = 0,2 \cdot 0,6 + (1 - 0,2) \cdot 0,3 = 0,36$$

$$p(B) = 36\%$$

b. “probabilidad de que este siguiendo una dieta si se sabe que hace deporte”  $p(A/B)$ .

Se aplica el teorema de Bayes:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B/A)}{p(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,36} = 0,33$$

$$p(A/B) = 33,3\%$$

**Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos, 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?
- b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

**Solución.**

Sucesos:  $A \equiv$  Un estudiante de la residencia universitaria utiliza la biblioteca.  
 $B \equiv$  Un estudiante de la residencia universitaria utiliza la lavandería.

Datos:  $p(A) = \frac{130}{183}$      $p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{70}{130} = \frac{7}{13}$      $p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{20}{183-130} = \frac{20}{53}$

a. 
$$p(B) = p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) =$$

$$= p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + (1 - p(A)) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{130}{183} \cdot \frac{7}{13} + \left(1 - \frac{130}{183}\right) \cdot \frac{20}{53} = \frac{30}{61}$$

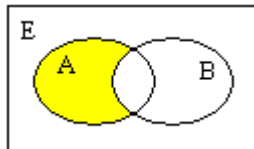
b. 
$$p\left(\frac{A}{\bar{B}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right)}{1 - p(B)} = \frac{p(A) \cdot (1 - p\left(\frac{B}{A}\right))}{1 - p(B)} = \frac{\frac{130}{183} \cdot \left(1 - \frac{7}{13}\right)}{1 - \frac{30}{61}} = \frac{20}{31}$$

**Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que  $P(A) = 0,6$ . Calcúlese  $P(A \cap \bar{B})$  en cada uno de los siguientes casos:

- a) A y B son mutuamente excluyentes.
- b)  $A \subset B$ .
- c)  $B \subset A$  y  $P(B) = 0,3$ .
- d)  $P(A \cap B) = 0,1$ .

**Solución.**



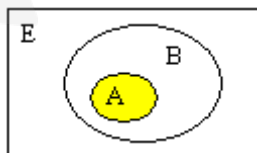
$A \cap \bar{B} \equiv$  Solo A  
 $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

- a. A y B son mutuamente excluyentes  $\equiv$  Si se cumple A no se cumple B y viceversa.

$p(A \cap B) = 0$

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,6 - 0 = 0,6$

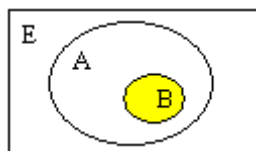
- b.  $A \subset B$



$p(A \cap B) = p(A)$

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A) = 0$

- c.  $B \subset A$  y  $P(B) = 0,3$ .



$p(A \cap B) = p(B)$

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(B) = 0,6 - 0,3 = 0,3$$

d.  $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,6 - 0,1 = 0,5$

**Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que:

$$p\left(\frac{A}{C}\right) \geq p\left(\frac{B}{C}\right) ; \quad p\left(\frac{A}{\bar{C}}\right) \geq p\left(\frac{B}{\bar{C}}\right)$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta.

a)  $p(A) < p(B)$                       b)  $p(A) \geq p(B)$

**Solución.**

Partiendo de las desigualdades propuestas hay que ver a cual de las dos opciones nos lleva. El ejercicio se puede hacer de diferentes formas, quedaros con la que os resulte más sencilla.

**1º** Aplicando el teorema de Bayes a cada una de las desigualdades propuestas

$$p\left(\frac{A}{C}\right) \geq p\left(\frac{B}{C}\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap C)}{p(C)} \geq \frac{p(B \cap C)}{p(C)} : \text{Simplificando } p(A \cap C) \geq p(B \cap C) \quad (1)$$

$$p\left(\frac{A}{\bar{C}}\right) \geq p\left(\frac{B}{\bar{C}}\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} \geq \frac{p(B \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} : \text{Simplificando } p(A \cap \bar{C}) \geq p(B \cap \bar{C}) \quad (2)$$

La desigualdad (2) esta formada por los sucesos solo A y solo B, que se pueden expresar en función de ellos y su intersección con el suceso C.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap \bar{C}) = p(A) - p(A \cap C) \\ p(B \cap \bar{C}) = p(B) - p(B \cap C) \end{array} \right\} \xrightarrow{(2)} p(A) - p(A \cap C) \geq p(B) - p(B \cap C) \quad (3)$$

Ordenando la expresión (3) de forma que las intersecciones queden a un lado y los sucesos simples al otro, podremos utilizar la desigualdad (1) para simplificar.

$$p(A) - p(B) \geq p(A \cap C) - p(B \cap C)$$

Si  $p(A \cap C) \geq p(B \cap C) \Rightarrow p(A \cap C) - p(B \cap C) \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} p(A) - p(B) \geq p(A \cap C) - p(B \cap C) \\ p(A \cap C) - p(B \cap C) \geq 0 \end{array} \right\} : p(A) - p(B) \geq 0 \Rightarrow \boxed{p(A) \geq p(B)}$$

Siempre se cumplirá **b**.

**2º** Aplicando el teorema de Bayes a cada una de las desigualdades propuestas

$$p\left(\frac{A}{C}\right) \geq p\left(\frac{B}{C}\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap C)}{p(C)} \geq \frac{p(B \cap C)}{p(C)} : \text{Simplificando } p(A \cap C) \geq p(B \cap C) \quad (1)$$

$$p\left(\frac{A}{\bar{C}}\right) \geq p\left(\frac{B}{\bar{C}}\right) \xrightarrow{\text{BAYES}} \frac{p(A \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} \geq \frac{p(B \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} : \text{Simplificando } p(A \cap \bar{C}) \geq p(B \cap \bar{C}) \quad (2)$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total a las intersecciones.

$$(1) \rightarrow p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right) \geq p(B) \cdot p\left(\frac{C}{B}\right)$$

$$(2) \rightarrow p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{C}}{A}\right) \geq p(B) \cdot p\left(\frac{\bar{C}}{B}\right)$$

Sumando las desigualdades y sacado factor común de p(A) en el primer miembro y de p(B) en el segundo.

$$p(A) \cdot \left( p\left(\frac{C}{A}\right) + p\left(\frac{\bar{C}}{A}\right) \right) \geq p(B) \cdot \left( p\left(\frac{C}{B}\right) + p\left(\frac{\bar{C}}{B}\right) \right)$$

Teniendo en cuenta que  $p\left(\frac{C}{A}\right) + p\left(\frac{\bar{C}}{A}\right) = 1$  por ser sucesos complementarios e igual para el caso de estar condicionado a B:

$$p(A) \cdot \overbrace{\left(p\left(\frac{C}{A}\right) + p\left(\frac{\bar{C}}{A}\right)\right)}^1 \geq p(B) \cdot \overbrace{\left(p\left(\frac{C}{B}\right) + p\left(\frac{\bar{C}}{B}\right)\right)}^1$$

$$p(A) \cdot 1 \geq p(B) \cdot 1 \Rightarrow \boxed{p(A) \geq p(B)}$$

Siempre se cumplirá **b**.

**Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión.
- Suceso B: Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que

$$p(A) = 0,005 \quad ; \quad p\left(\frac{B}{A}\right) = 0,95 \quad ; \quad p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = 0,96$$

- Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.
- Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación  $\bar{A}$  representa el suceso complementario de A

**Solución.**

a.  $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = p(A) \cdot (1 - p\left(\frac{B}{A}\right)) = 0,005 \cdot (1 - 0,95) = 0,00025 = 0,025\%$

b.  $p(B) = p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) =$   
 $= p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + (1 - p(A)) \cdot (1 - p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right)) = 0,005 \cdot 0,95 + (1 - 0,005) \cdot (1 - 0,96) = 0,04455 = 4,45\%$

**Junio 2010. F.G. Ejercicio 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que  $p(A) = 0,5$ ;  $p(B) = 0,4$ ;  $p(A \cap B) = 0,1$ . Calcúlese cada una de las siguientes probabilidades:

a)  $p(A \cup B)$     b)  $p(\bar{A} \cup \bar{B})$     c)  $p(A/B)$     d)  $p(\bar{A} \cap B)$

**Solución.**

a.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$

b. Aplicando la ley de Morgan:  $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

c. Aplicando el teorema de Bayes:  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$

d. Suceso "solo B":  $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

**Junio 2010. F.M. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos.
- Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

**Solución.**

a. Aunque se puede hacer por intersección de sucesos independientes, lo más práctico es hacerlo mediante una variable discreta (x) con distribución Binomial (B(n, p)).

x ≡ número de veces que sale cara seis al lanzar un dado seis veces.

N ≡ número de pruebas (6).

p ≡ probabilidad de éxito (1/6).

q ≡ probabilidad de no éxito (5/6).

r ≡ número de éxitos.

$$x : B\left(6, \frac{1}{6}\right)$$

En estas distribuciones, la probabilidad de que en N pruebas haya r éxitos viene dada por la expresión:

$$p(N, r) = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot q^{N-r}$$

Aplicando los datos del problema:

$$p(6, r \geq 1) = p(\overline{6, r < 1}) = 1 - p(6, r < 1) = 1 - p(6, 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651$$

La probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 6 veces un dado es de 66,51%.

b. En este caso el suceso se resuelve como intersección de sucesos independientes.

A ≡ Obtener 6 en el lanzamiento de un dado.

$$p(A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap A) \stackrel{\text{S. Independientes}}{=} p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(A) = (p(A))^2 \cdot (p(\bar{A}))^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,0134$$

La probabilidad de que al lanzar un dado seis veces el primero y último sean seis y los demás cualquier otro es del 1,34%.

### Junio 2010. F.G. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.

b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

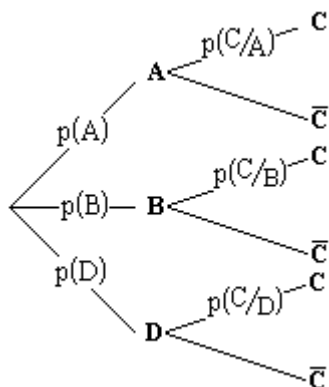
#### Solución.

a. El ejercicio se puede plantear mediante un diagrama en árbol, para que resulte más sencillo es conveniente definir sucesos:

A ≡ Escoger una moneda con cara y cruz. B ≡ Escoger una moneda con caras

D ≡ Escoger una moneda con dos cruces. C ≡ Obtener cara en el lanzamiento de una moneda

Datos:  $p(A) = \frac{5}{10}$ ;  $p(B) = \frac{3}{10}$ ;  $p(D) = \frac{2}{10}$ ;  $p(C/A) = \frac{1}{2}$ ;  $p(C/B) = 1$ ;  $p(C/D) = 0$



$$p(C) = p((A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (D \cap C)) = p(A \cap C) + p(B \cap C) + p(D \cap C) = p(A) \cdot p(C/A) + p(B) \cdot p(C/B) + p(D) \cdot p(C/D) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 0 = \frac{11}{20}$$



b. Probabilidad condicionada:

$$p\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right)}{p(C)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}$$

**Junio 2010. F.G. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que  $p(A) = 0,2$  y  $p(B) = 0,4$ .

- a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese  $p(A \cap B)$ . ¿Son además A y B independientes? Razónese.
- b) Si A y B son independientes, calcúlese  $p(A \cap B)$ . ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.
- c) Si  $p(A/B) = 0$ , calcúlese  $p(A \cap B)$ . ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.
- d) Si  $A \subset B$ , calcúlese  $p(A \cap B)$ . ¿Son A y B independientes? Razónese.

**Solución.**

a. Dos sucesos son mutuamente excluyentes si al ocurrir uno es imposible de que ocurra el otro, por lo tanto no tienen elementos comunes y su intersección es el conjunto vacío.

$$p(A \cap B) = 0$$

**No son independientes.** Para que dos sucesos sean independientes se debe cumplir:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A) \cdot p(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \neq p(A \cap B) = 0$$

b. Si son independientes:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$$

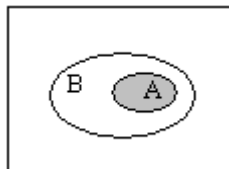
**No son mutuamente excluyentes** porque la intersección es distinta de cero y por tanto existen elementos que cumplen ambos sucesos simultáneamente.

c. Según el teorema de Bayes:  $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = 0: \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0: p(A \cap B) = 0$$

En caso, se cumple lo mismo que en el apartado A, por lo tanto, y por las mismas razones, son **mutuamente excluyentes** y **no son independientes**.

d. Si  $A \subset B$ ,  $p(A \cap B) = p(A) = 0,2$



**No son independientes**

$$p(A) \cdot p(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \neq p(A \cap B) = 0,2$$

**Modelo 2010. Ejercicio 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona al azar un hogar europeo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

**Solución.**

A ≡ Tiene acceso a Internet.

B ≡ Tiene televisión por cable.

Datos:

$$p(A) = 0.40 ; p(B) = 0.33 ; p(A \cap B) = 0.20$$

a) Solo televisión por cable ≡ No tiene acceso a Internet Y tiene TV por cable.

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0.33 - 0.20 = 0.13$$

b) No tiene acceso a Internet Y no tiene TV por cable.

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap \overline{B}) &= p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = \\ &= 1 - [0.40 + 0.33 - 0.20] = 0.57 \end{aligned}$$

**Modelo 2010. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

- a)  $P(A \cup B)$
- b)  $P(A \cap B)$
- c)  $P(\overline{A} / B)$
- d)  $P(\overline{B} / A)$

**Solución.**

a. Aplicando las leyes de Morgan a la probabilidad de la intersección de los complementarios se obtiene la probabilidad de la unión.

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

Despejando

$$p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

b. Conocida la unión, mediante su definición se calcula la intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{3}{10}$$

c. Los dos últimos sucesos se obtienen aplicando el teorema de Bayes y el suceso diferencia.

$$p(\overline{A} / B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$d. \quad p(\overline{B} / A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$$

**Septiembre 2009. Ejercicio 3A: (Puntuación máxima: 2 puntos)**

En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destinan a empresas y el 20% son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10% resultan impagados, de los concedidos a empresas son impagados el 20% y de los concedidos para consumo resultan impagados el 10%.

- a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo sabiendo que se ha pagado?

**Solución.**

Sucesos: - V  $\equiv$  Crédito para vivienda - E  $\equiv$  Crédito para empresa  
 - C  $\equiv$  Crédito para consumo - P  $\equiv$  Crédito pagado

Datos: -  $p(V) = 30\% = 0,3$  -  $p(E) = 50\% = 0,5$  -  $p(C) = 20\% = 0,2$   
 -  $p(\overline{P}/V) = 10\% = 0,1$  -  $p(\overline{P}/E) = 20\% = 0,2$  -  $p(\overline{P}/C) = 10\% = 0,1$

a.  $p(A) = ?$  El suceso pagado esta formado por tres sucesos incompatibles (crédito de vivienda y pagado ó crédito de empresa y pagado ó crédito de consumo y pagado).

$$p(A) = p((V \cap P) \cup (E \cap P) \cup (C \cap P))$$

La probabilidad de pagar un crédito depende del tipo crédito, como pone en evidencia los datos  $p(\overline{P}/V)$ ,  $p(\overline{P}/E)$  y  $p(\overline{P}/C)$ , por lo tanto la intersección se resuelve por el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} p(A) &= p((V \cap P) \cup (E \cap P) \cup (C \cap P)) = p(V \cap P) + p(E \cap P) + p(C \cap P) = \\ &= p(V) \cdot p(P/V) + p(E) \cdot p(P/E) + p(C) \cdot p(P/C) = \begin{cases} p(P/V) = 1 - p(\overline{P}/V) = 1 - 0,1 = 0,9 \\ p(P/E) = 1 - p(\overline{P}/E) = 1 - 0,2 = 0,8 \\ p(P/C) = 1 - p(\overline{P}/C) = 1 - 0,1 = 0,9 \end{cases} = \\ &= 0,3 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,85 = 85\% \end{aligned}$$

b.  $p(C/P) = ?$  Se resuelve aplicando el teorema Bayes para calcular la probabilidad condicionada y el de probabilidad total para la intersección.

$$p(C/P) = \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{p(C) \cdot p(P/C)}{p(P)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,85} = 0,2118 = 21,18\%$$

**Septiembre 2009. Ejercicio 3B: (Puntuación máxima: 2 puntos)**

La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo.

Calcúlese la probabilidad de que le guste:

- a) al menos uno de los dos tipos de música.
- b) la música clásica y también la música moderna.
- c) sólo la música clásica
- d) solo la música moderna.

**Solución.**

Sucesos: - M  $\equiv$  Música moderna. - C  $\equiv$  Música clásica.

Datos:  $p(M) = 0,55$   $p(C) = 0,40$   $p(\overline{M} \cap \overline{C}) = 0,25$

a.  $p(M \cup C) = ?$  Aplicando las leyes de Morgan a la intersección de los complementarios, se obtiene la probabilidad de la unión.

$$\begin{aligned} p(\overline{M} \cap \overline{C}) &= p(\overline{M \cup C}) = 1 - p(M \cup C) \\ p(M \cup C) &= 1 - p(\overline{M} \cap \overline{C}) = 1 - 0,25 = 0,75 \end{aligned}$$

b.  $p(M \cap C) = ?$  Se obtiene a partir de la probabilidad de la unión de sucesos compatibles.

$$\begin{aligned} p(M \cup C) &= p(M) + p(C) - p(M \cap C) \\ p(M \cap C) &= p(M) + p(C) - p(M \cup C) = 0,55 + 0,40 - 0,75 = 0,20 \end{aligned}$$

c. Solo la música clásica  $\equiv$  si música clásica y no música moderna

$$p(\overline{M} \cap C) = p(C) - p(M \cap C) = 0,40 - 0,20 = 0,20$$

- d. Solo la música moderna  $\equiv$  no música clásica y si música moderna  
 $p(M \cap \bar{C}) = p(M) - p(M \cap C) = 0,55 - 0,20 = 0,35$

**Junio 2009. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = \frac{1}{2}; p(B) = \frac{1}{3}; p(C) = \frac{1}{4}; p(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}; p(A \cap B \cap C) = 0; p\left(\frac{A}{B}\right) = p\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{1}{2}$$

- a) Calcúlese  $p(C \cap B)$   
 b) Calcúlese  $p(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$ . La notación  $\bar{A}$  representa el suceso complementario de A.

**Solución.**

- a. Partiendo de la probabilidad de la unión de tres sucesos se calcula la probabilidad pedida.

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Teniendo en cuenta:

- $p(A \cap B) = p(B \cap A) = p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right)$
- $p(A \cap C) = p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right)$
- $p(B \cap C) = p(C \cap B)$
- $p(A \cap B \cap C) = 0$

se despeja  $p(C \cap B)$

$$p(C \cap B) = p(A) + p(B) + p(C) - p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right) - p(A) \cdot p\left(\frac{C}{A}\right) - p(A \cup B \cup C)$$

$$p(C \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 0$$

- b. Aplicando las leyes de Morgan:

$$p(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = p(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - p(A \cap B \cap C) = 1 - 0 = 1$$

**Junio 2009. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

- a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.  
 b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

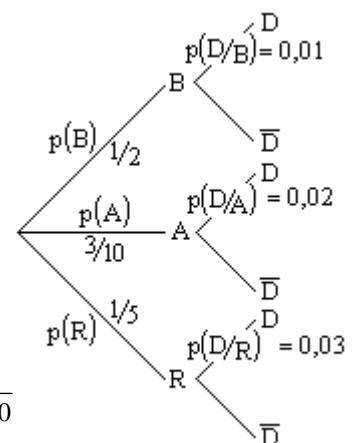
**Solución.**

Sucesos:

B  $\equiv$  Bombilla blanca; A  $\equiv$  Bombilla azul; R  $\equiv$  Bombilla roja; D  $\equiv$  Bombilla defectuosa.

Datos:  $-p(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$     $-p(A) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$     $-p(R) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$   
 $-p\left(\frac{D}{B}\right) = 0,01$     $-p\left(\frac{D}{A}\right) = 0,02$     $-p\left(\frac{D}{R}\right) = 0,03$

Diagrama en árbol:



- a. Bombilla defectuosa  $\equiv$  Blanca y Defectuosa ó Azul y Defectuosa ó Roja y Defectuosa

$$p(D) = p((B \cap D) \cup (A \cap D) \cup (R \cap D)) = p(B \cap D) + p(A \cap D) + p(R \cap D) =$$

$$= p(B) \cdot p\left(\frac{D}{B}\right) + p(A) \cdot p\left(\frac{D}{A}\right) + p(R) \cdot p\left(\frac{D}{R}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = \frac{17}{1000}$$

$$p(D) = 1,7\%$$

$$b. \quad p\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{BAYES}} = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{D}{A}\right)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0,02}{\frac{17}{1000}} = \frac{6}{17} \approx 0,3529$$

$$p\left(\frac{A}{D}\right) = 35,29\%$$

**Modelo 2009. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.
- b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

**Solución.**

a. Sea A el suceso salir cara y sea B el suceso salir cruz.

$$\begin{aligned} p((A \cap A \cap B) \cup (A \cap B \cap A) \cup (B \cap A \cap A)) &= p(A \cap A \cap B) + p(A \cap B \cap A) + p(B \cap A \cap A) = \\ &= p(A) \cdot p(A) \cdot p(B) + p(A) \cdot p(B) \cdot p(A) + p(B) \cdot p(A) \cdot p(A) = 3 \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(B) = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

b. Se resuelve por la definición axiomática de probabilidad. El espacio muestral es:

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} \underline{1-1} & \underline{2-1} & \underline{3-1} & \underline{4-1} & \underline{5-1} & \underline{6-1} \\ 1-2 & 2-2 & 3-2 & 4-2 & 5-2 & 6-2 \\ 1-3 & 2-3 & \underline{3-3} & \underline{4-3} & 5-3 & 6-3 \\ 1-4 & \underline{2-4} & \underline{3-4} & 4-4 & 5-4 & 6-4 \\ \underline{1-5} & \underline{2-5} & 3-5 & 4-5 & 5-5 & 6-5 \\ \underline{1-6} & 2-6 & 3-6 & 4-6 & 5-6 & 6-6 \end{array} \right\}$$

Las parejas subrayadas son los casos favorables.

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{11}{36}$$

**Modelo 2009. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.

- a) Si se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?
- b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

**Solución.**

Definición de sucesos:

A ≡ Tener un accidente.

B ≡ Necesitar Grúa.

Datos:

“La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2.”

$$p(A) = 0,2$$

“Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85.”

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = 0,85$$

“La probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.”

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = 0,1$$

$$\begin{aligned} \text{a. } p(B) &= p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) = \\ &= 0,2 \cdot 0,85 + (1 - 0,2) \cdot 0,1 = 0,25 \end{aligned}$$

Nota:  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$$\text{b. } p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)}{p(B)} = \frac{(1 - 0,2) \cdot 0,1}{0,25} = 0,32$$

Otra forma de hacerlo es mediante un cuadro de contingencia.

|             | NECESITA GRUA         | NO NECESITA GRUA   |                              |
|-------------|-----------------------|--------------------|------------------------------|
| ACIDENTE    | $20 \times 0,85 = 17$ | $20 - 17 = 3$      | <b>20</b>                    |
| NO ACIDENTE | $80 \times 0,1 = 8$   | $80 - 8 = 72$      | <b>100 - 20 = 80</b>         |
|             | <b>17 + 8 = 25</b>    | <b>3 + 72 = 75</b> | <b>100 ≡ Base de calculo</b> |

**AZUL** ≡ Proviene de los datos del enunciado.

**ROJO** ≡ Se obtienen por suma o diferencia.

El problema se resuelve mediante los datos del cuadro y la definición axiomática de probabilidad.

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos Posibles}}$$

$$\text{a. } p(\text{Necesita grua}) = \frac{\text{Vehículos que necesitan grua}}{\text{Vehículos totales}} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$$

$$\begin{aligned} \text{b. } p(\text{No accidente si ha necesitado Grua}) &= \frac{\text{Vehículos no accidentados que han necesitado grua}}{\text{Vehículos que han necesitado grua}} = \\ &= \frac{8}{25} = 0,32 = 32\% \end{aligned}$$

### Septiembre 2008. Ejercicio 3A: (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0,46; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.

- Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?
- Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

#### Solución.

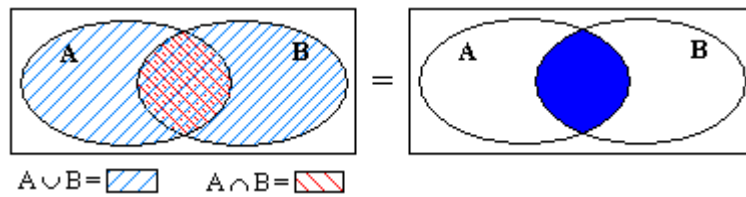
Datos:  $p(A) = 0,46$      $p(B) = 0,33$      $p(A \cap B) = 0,15$

$$\text{a. } p(\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{Leyes MORGAN}}{=} p(\overline{A \cup B}) \stackrel{\text{COMPLEMENTARIO}}{=} 1 - p(A \cup B) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B))$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (0,46 + 0,33 - 0,15) = 0,36$$

b. 
$$p(A \cap B / A \cup B) \stackrel{\text{BAYES}}{=} \frac{p((A \cap B) \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)}$$

Lo común a la unión y la intersección es la intersección.



$$p(A \cap B / A \cup B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A) + p(B) - p(A \cap B)} = \frac{0,15}{0,46 + 0,33 - 0,15} = \frac{0,15}{0,64} = 0,23$$

**Septiembre 2008. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

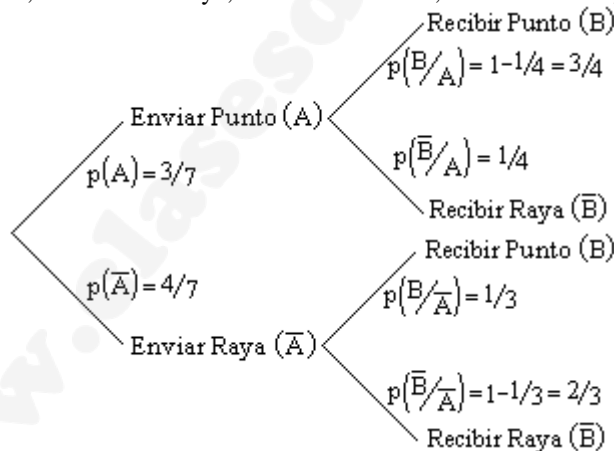
Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son *punto* y *raya* y que el telégrafo envía un *punto* con probabilidad  $\frac{3}{7}$  y una *raya* con probabilidad  $\frac{4}{7}$ . Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un *punto* se reciba una *raya* con probabilidad  $\frac{1}{4}$  y que cuando se envíe una *raya* se reciba un *punto* con probabilidad  $\frac{1}{3}$ .

- a) Si se recibe una *raya*, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una *raya*?
- b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe *punto-punto* se hubiera enviado *raya-rama*?

**Solución.**

Para entender el enunciado se puede representar el enunciado mediante un diagrama en árbol definiendo dos sucesos y sus complementarios.

A ≡ Enviar Punto;  $\bar{A}$  ≡ Enviar Raya; B ≡ Recibir Punto;  $\bar{B}$  ≡ Recibir Raya



a. 
$$p\left(\frac{\text{Enviar Raya}}{\text{Recibido Raya}}\right) = p\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right) \stackrel{\text{BAYES}}{=} \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))} =$$

$$= \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A})}{p(A) \cdot p(\bar{B}/A) + p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A})} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{32}{41} \approx 78\%$$

b. 
$$p\left(\left(\frac{\text{Enviar Raya}}{\text{Recibido Punto}}\right) \cap \left(\frac{\text{Enviar Raya}}{\text{Recibido Punto}}\right)\right) =$$

$$= p\left(\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) \cap \left(\frac{\bar{A}}{B}\right)\right) \stackrel{\text{INDEPENDIENTES}}{=} p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) \cdot p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \left(p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)\right)^2$$

Calculo de  $p(\bar{A}/B)$ ,

$$p(\bar{A}/B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p(B/A)}{p(A) \cdot p(B/A) + p(\bar{A}) \cdot p(B/\bar{A})} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{16}{43}$$

Sustituyendo:

$$p\left(\left(\bar{A}/B\right) \cap \left(\bar{A}/B\right)\right) = \left(p\left(\bar{A}/B\right)\right)^2 = \left(\frac{16}{43}\right)^2 = \frac{256}{1849} = 0,138$$

**Junio 2008. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

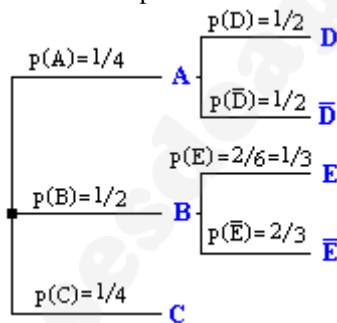
En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.
- b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

**Solución.**

Una forma sencilla de visualizar el problema es planteando un diagrama en árbol, para ello es recomendable asignar letras a los distintos sucesos.

- G ≡ Ganar
- A ≡ Obtener dos caras
- B ≡ Obtener una cara
- C ≡ Obtener dos cruces
- D ≡ Obtener par
- E ≡ Obtener ≥ 5



Las probabilidades elementales (obtener dos caras,...) se calculan por la definición axiomática.

- a. Probabilidad de ganar:

$$p(G) = p((A \cap D) \cup (B \cap D)) \stackrel{\text{Incompatibles}}{=} p(A \cap D) + p(B \cap D) \stackrel{\text{Independientes}}{=} p(A) \cdot p(D) + p(B) \cdot p(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

- b. Si ha ganado probabilidad de haber obtenido dos caras

Si ha ganado y ha sacado dos caras, también habrá sacado en el lanzamiento del dado puntuación mayor o igual a cinco, por lo tanto se pide:

$$p(A \cap D/G) = \frac{p(A \cap D)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

**Junio 2008. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que:

$$p(A) = \frac{1}{4}, \quad p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

- a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.



b) Calcúlese  $p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$ .

Nota.- La notación  $\bar{A}$  representa al suceso complementario de A.

**Solución.**

a. Dos sucesos son independientes si cumplen:

$$p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$$

$p(A \cap B)$  Se calcula a partir de la unión de sucesos

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = p(A \cap B)$$

**Sucesos independientes**

b. Aplicando el teorema de Bayes:  $p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} \stackrel{\text{Leyes de Morgan}}{=} \frac{p(\overline{A \cup B})}{p(\bar{B})} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} =$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

**Modelo 2008. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Un instituto tiene 2 grupos de 2° de bachillerato. El grupo A está formado por 18 alumnas, de las cuales 5 juegan al baloncesto, y 12 alumnos, 7 de los cuales juegan al mismo deporte. El grupo B está formado por 12 alumnas, 4 de ellas jugadoras de baloncesto, y 13 alumnos, 7 de los cuales practican baloncesto.

- (a) Si se elige un estudiante de 2° de bachillerato al azar, calcular la probabilidad de que sea mujer.
- (b) ¿En qué grupo es más probable elegir al azar un estudiante que juegue al baloncesto?

**Solución.**

Datos: Se pueden reflejar en un cuadro de contingencia.

|         |         | Baloncesto | No Baloncesto |    |
|---------|---------|------------|---------------|----|
| Grupo A | Alumnas | 5          | 13            | 18 |
|         | Alumnos | 7          | 5             | 12 |
|         |         | 12         | 18            | 30 |
| Grupo B | Alumnas | 4          | 8             | 12 |
|         | Alumnos | 7          | 6             | 13 |
|         |         | 11         | 14            | 25 |

a. La probabilidad se calcula por la definición axiomática de probabilidad.

$$p(A) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}}$$

Suceso A  $\equiv$  Alumna del centro.

$$p(A) = \frac{\text{Alumnas grupo A} + \text{Alumnas grupo B}}{\text{Total}} = \frac{18 + 12}{30 + 25} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$$

- b.  $B_A \equiv$  Jugar al baloncesto en el grupo A;  $B_B \equiv$  Jugar al baloncesto en el grupo B

$$p(B_A) = \frac{\text{Baloncesto en grupo A}}{\text{Totales grupo A}} = \frac{12}{12+18} = \frac{12}{30} = 0'4$$

$$p(B_B) = \frac{\text{Baloncesto en grupo B}}{\text{Totales grupo B}} = \frac{11}{11+14} = \frac{11}{25} = 0'44\dots$$

$$p(B_B) = 44'44\% > p(B_A) = 40\%$$

En el grupo B es más probable que un estudiante juegue al baloncesto que en el grupo A.

**Modelo 2008. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

La orquesta Musiquera está formada por 3 tipos de instrumentos, 30 de madera, 15 de viento y 5 de percusión. La víspera de un concierto se ponen enfermos dos músicos. Calcular la probabilidad de que:

- (a) Ambos toquen instrumentos de viento.  
 (b) Ambos toquen el mismo tipo de instrumento.

**Solución.**

Se puede resolver de dos formas diferentes:

**i. Por la definición axiomática de probabilidad y combinatoria.**

- Definición axiomática de probabilidad:  $p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$
- Combinaciones de m elementos tomadas de n en n:  $C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

- a.  $A \equiv$  Los dos músicos que enferman son de instrumentos de viento.

$$p(A) = \frac{C_{15,2}}{C_{50,2}} = \frac{\frac{15!}{2!(15-2)!}}{\frac{50!}{2!(50-2)!}} = \frac{\frac{15!}{2! \cdot 13!}}{\frac{50!}{2! \cdot 48!}} = \frac{\frac{15 \times 14}{2}}{50 \cdot 49} = \frac{105}{1225} = \frac{3}{35} = 0'0857$$

- b.  $A \equiv$  Los dos músicos que enferman son del mismo instrumentos.

$$p(A) = \frac{C_{30,2} + C_{15,2} + C_{5,2}}{C_{50,2}} = \frac{\frac{30!}{2!(30-2)!} + \frac{15!}{2!(15-2)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!}}{\frac{50!}{2!(50-2)!}} = \frac{435 + 105 + 10}{1225} = \frac{550}{1225} = \frac{22}{49} = 0'4490$$

**ii. Por álgebra de sucesos. Sucesos dependientes**

Para sucesos dependientes, la intersección se resuelve por el teorema de la probabilidad total.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)$$

Sucesos

- $M_i \equiv$  El músico i que se pone enfermo es de un instrumento de madera.
- $V_i \equiv$  El músico i que se pone enfermo es de un instrumento de viento.
- $P_i \equiv$  El músico i que se pone enfermo es de un instrumento de percusión.

- a. Los dos músicos que se ponen enfermos son de viento. Intersección de dos sucesos dependientes.

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \cdot p\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{210}{2450} = \frac{3}{35}$$

- b. Los dos músicos que se ponen enfermos son del mismo instrumento. Los dos son de madera o los dos son de viento o los dos son de percusión, unión de intersecciones.

$$p[(M_1 \cap M_2) \cup (V_1 \cap V_2) \cup (P_1 \cap P_2)] = p(M_1 \cap M_2) + p(V_1 \cap V_2) + p(P_1 \cap P_2) =$$

$$= p(M_1) \cdot p\left(\frac{M_2}{M_1}\right) + p(V_1) \cdot p\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + p(P_1) \cdot p\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{1100}{2450} = \frac{22}{49}$$

**Septiembre 2007. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

- (a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.
- (b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

**Solución.**

**Sucesos:**

A ≡ Lácteo tipo A; B ≡ Lácteo tipo B; C Lácteo tipo C; D ≡ Lácteo caducado

**Datos:**  $p(A) = \frac{100}{200} = 0'50$        $p(B) = \frac{60}{200} = 0'30$        $p(C) = \frac{40}{200} = 0'20$   
 $p\left(\frac{D}{A}\right) = 0'01$        $p\left(\frac{D}{B}\right) = 0'02$        $p\left(\frac{D}{C}\right) = 0'03$

**a.**

$$p(D) = p((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (A \cap C)) \underset{\text{INCOMPATIBLES}}{=} p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(A \cap C) \underset{\text{DEPENDIENTES}}{=} p(A) \cdot p\left(\frac{D}{A}\right) + p(B) \cdot p\left(\frac{D}{B}\right) + p(C) \cdot p\left(\frac{D}{C}\right) = 0'50 \cdot 0'01 + 0'30 \cdot 0'02 + 0'20 \cdot 0'03 = 0'017$$

La probabilidad de que un producto lácteo este caducado es del 1'7%

**b.**

$$p\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B) \cdot p\left(\frac{D}{B}\right)}{p(D)} = \frac{0'30 \cdot 0'02}{0'017} = 0'3529$$

Si el producto lácteo está caducado, la probabilidad de que sea del tipo B es del 35'29%.

**Otra forma de hacer el problema** es mediante un cuadro de contingencia y la definición axiomática de probabilidad.

|             | TIPO A                | TIPO B                 | TIPO C                 |                       |
|-------------|-----------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| CADUCADO    | $100 \times 0'01 = 1$ | $60 \times 0'02 = 1'2$ | $40 \times 0'03 = 1'2$ | $1 + 1'2 + 1'2 = 3'4$ |
| NO CADUCADO | $100 - 1 = 99$        | $60 - 1'2 = 58'8$      | $40 - 1'2 = 38'8$      | $200 - 3'4 = 196'6$   |
|             | <b>100</b>            | <b>60</b>              | <b>40</b>              | <b>200</b>            |

**a.**

$$p(D) = \frac{\text{CADUCADOS}}{\text{TOTALES}} = \frac{3'4}{200} = 0'017$$

**b.**

$$p\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{\text{CADUCADOS TIPO B}}{\text{TOTAL CADUCADOS}} = \frac{1'2}{3'4} = 0'3529$$

**Septiembre 2007. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B) \quad P(A \cap B) \quad P(\overline{A} / B) \quad P(\overline{B} / A)$$

**Solución.**

Aplicando las leyes de Morgan a la probabilidad de la intersección de los complementarios se obtiene la probabilidad de la unión.

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$$

Despejando

$$p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

Conocida la unión, mediante su definición se calcula la intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{3}{10}$$

Los dos últimos sucesos se obtienen aplicando el teorema de Bayes y el suceso diferencia.

$$p(\overline{A} / B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$p(\overline{B} / A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$$

**Junio 2007. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de solo tenga contratada la televisión por cable?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

**Solución.**

A ≡ Tiene acceso a internet.

B ≡ Tiene televisión por cable.

Datos:

$$p(A) = 0.40 ; p(B) = 0.33 ; p(A \cap B) = 0.20$$

- c) Solo televisión por cable ≡ No tiene acceso a internet **Y** tiene TV por cable.

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0.33 - 0.20 = 0.13$$

- d) No tiene acceso a internet **Y** no tiene TV por cable.

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap \overline{B}) & \stackrel{\text{MORGAN}}{=} p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = \\ & = 1 - [0.40 + 0.33 - 0.20] = 0.57 \end{aligned}$$

**Junio 2007. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> y C<sub>3</sub>, que forman al 40%, 35% y 25% de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5%, 3% y 4%, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

- a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.
- b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se halla formado en el primer conservatorio (C<sub>1</sub>).

**Solución.**

**Sucesos:**

C<sub>1</sub> ≡ Conservatorio I

C<sub>2</sub> ≡ Conservatorio II

C<sub>3</sub> ≡ Conservatorio III

V ≡ Virtuoso

**Datos:**  $p(C_I) = 0.40$       $p\left(\frac{V}{C_I}\right) = 0.05$

$p(C_{II}) = 0.35$       $p\left(\frac{V}{C_{II}}\right) = 0.03$

$$p(C_{III}) = 0'25 \quad p\left(\frac{V}{C_I}\right) = 0'04$$

$$\begin{aligned} \text{a) } p(V) &= p\left[\frac{(C_I \cap V) \cup (C_{II} \cap V) \cup (C_{III} \cap V)}{S. INCOMPATIBLES}\right] = \\ &= p(C_I \cap V) + p(C_{II} \cap V) + p(C_{III} \cap V) \quad = \quad \text{S. Dependientes} \\ &= p(C_I) \cdot p\left(\frac{V}{C_I}\right) + p(C_{II}) \cdot p\left(\frac{V}{C_{II}}\right) + p(C_{III}) \cdot p\left(\frac{V}{C_{III}}\right) = \\ &= 0'40 \cdot 0'05 + 0'35 \cdot 0'03 + 0'25 \cdot 0'04 = 0'0405 \end{aligned}$$

$$p(V) = 4'05\%$$

$$\text{b) } p\left(\frac{C_I}{V}\right) = \frac{p(C_I \cap V)}{p(V)} = \frac{p(C_I) \cdot p\left(\frac{V}{C_I}\right)}{p(V)} = \frac{0'40 \cdot 0'05}{0'0405} = 0'494$$

$$p\left(\frac{C_I}{V}\right) = 49'4\%$$

### Septiembre 2006. Ejercicio 3. (Puntuación máxima 2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30% de la primera, el 25% de la segunda y el 45% de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2%, mientras que dicha proporción es 0,5% en la segunda, y 0,1% en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

#### Solución.

Sucesos:

- $R_1 \equiv$  El tigre procede de la reserva 1.
- $R_2 \equiv$  El tigre procede de la reserva 2.
- $R_3 \equiv$  El tigre procede de la reserva 3.
- $A \equiv$  El tigre es albino

Datos:

$$\begin{array}{lll} p(R_1) = 0'30 & p(R_2) = 0'25 & p(R_3) = 0'45 \\ p(A/R_1) = 0'002 & p(A/R_2) = 0'005 & p(A/R_3) = 0'001 \end{array}$$

Se pide:

$$p(A) = p\left[(R_1 \cap A) \cup (R_2 \cap A) \cup (R_3 \cap A)\right]$$

Por ser imposible que un tigre pertenezca a dos regiones distintas, los sucesos son incompatibles.

$$p(A) = p(R_1 \cap A) + p(R_2 \cap A) + p(R_3 \cap A)$$

Teniendo en cuenta que la proporción de albinos depende de la reserva

$$\begin{aligned} p(A) &= p(R_1) \cdot p\left(\frac{A}{R_1}\right) + p(R_2) \cdot p\left(\frac{A}{R_2}\right) + p(R_3) \cdot p\left(\frac{A}{R_3}\right) = \\ &= 0'30 \cdot 0'002 + 0'25 \cdot 0'005 + 0'45 \cdot 0'001 = 0'0023 = 0'23\% \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo es mediante un cuadro de contingencia. De esta forma, para resolver el problema es necesario tomar una base de cálculo, en este caso un número de tigres, para evitar que aparezcan números decimales que podrían confundir, y dado que los datos de probabilidad son muy bajos, tomo como base de cálculo 10000 tigres, y relleno el siguiente cuadro.

|                   | Reserva 1                                   | Reserva 2                                    | Reserva 3                                    |  |
|-------------------|---|--|--|--|
| <b>Albinos</b>    | $30\ 000 \times 0'002 =$<br><b>= 60</b>     | $25\ 000 \times 0'005 =$<br><b>= 125</b>     | $45\ 000 \times 0'001 =$<br><b>= 45</b>      | $60 + 125 + 45 =$<br><b>230</b>        |
| <b>No albinos</b> | $30\ 000 - 60 =$<br><b>= 29\ 940</b>        | $25\ 000 - 125 =$<br><b>= 24\ 875</b>        | $45\ 000 - 45 =$<br><b>= 44\ 955</b>         | $100\ 000 - 230 =$<br><b>= 99\ 770</b> |
|                   | $100\ 000 \times 0'3 =$<br><b>= 30\ 000</b> | $100\ 000 \times 0'25 =$<br><b>= 25\ 000</b> | $100\ 000 \times 0'45 =$<br><b>= 45\ 000</b> | <b>100\ 000</b>                        |

Por la definición axiomática de probabilidad:

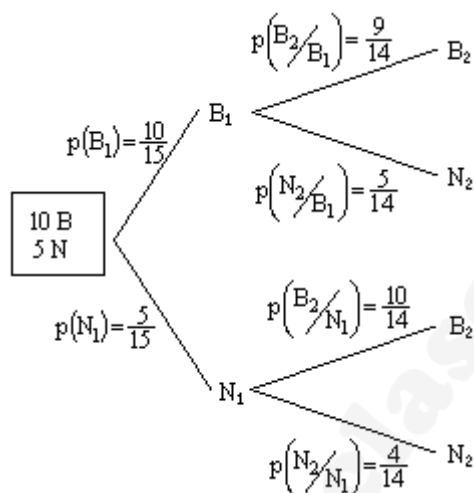
$$p(\text{Albino}) = \frac{\text{Número total de tigres albinos}}{\text{Número total de tigres}} = \frac{230}{100\ 000} = 0'0023 = 0'23\%$$

**Septiembre 2006. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

**Solución.**

La mejor forma de analizar el problema es mediante un diagrama en árbol.



Se pide  $p((A_1 \cap A_2) \cup (N_1 \cap N_2))$

Teniendo en cuenta que  $(A_1 \cap A_2)$  y  $(N_1 \cap N_2)$  son incompatibles y que la segunda extracción depende del resultado de la primera:

$$\begin{aligned}
 p((A_1 \cap A_2) \cup (N_1 \cap N_2)) &= p(A_1 \cap A_2) + p(N_1 \cap N_2) = \\
 &= p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) + p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) = \\
 &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{110}{210} = \frac{11}{21}
 \end{aligned}$$

**Junio 2006. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25.

Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

**Solución.**

Sucesos:

$A \equiv$  Regar el jardín.       $B \equiv$  El jardín progresa

Datos:

- $p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $p(B/A) = p(\bar{B}/A) = 0'5$  Sucesos complementarios
- $p(B/\bar{A}) = \frac{1}{4}$

Se pide:  $p(\bar{A}/B)$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 p\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right) &= \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right)}{p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right)} = \\
 &= \frac{p(\bar{A}) \cdot \left(1 - p\left(\frac{B}{A}\right)\right)}{p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot \left(1 - p\left(\frac{B}{A}\right)\right)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Por cuadro de contingencia: Base de calculo = 60 (La elección de 60 es por simplificar los cálculos y evitar números decimales)

|              | Regar | No regar |    |
|--------------|-------|----------|----|
| Progresar    | 10    | 10       | 20 |
| No progresar | 10    | 30       | 40 |
|              | 20    | 40       | 60 |

$$p\left(\frac{\text{No regar}}{\text{No progresar}}\right) = \frac{p(\text{No regar} \cap \text{No progresar})}{p(\text{No progresar})} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

**Junio 2006. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima 2 puntos)

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

- Describir el espacio muestral de este experimento.
- Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

**Solución.**

- Sea c obtener cara en la moneda y x obtener cruz:

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} c-1 & c-2 & c-3 & c-4 & c-5 & c-6 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-4 & x-5 & x-6 \end{array} \right\}$$

- 

A ≡ Obtener cara

B ≡ Obtener par

Se pide:  $p(A \cap B) \stackrel{\text{INDEPENDIENTES}}{=} p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Otra forma de hacerlo es por la definición axiomática de probabilidad:

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

**Modelo 2006. 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,2 \quad P(A \cap B) = 0,12$$

- Calcular las probabilidades de los sucesos  $(A \cup B)$  y  $(A / (A \cup B))$
- ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

**Solución.**

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'6 + 0'2 - 0'12 = 0'68$

Teniendo en cuenta la propiedad simplificativa de la intersección respecto a la unión.

$$A \cap (B \cup A) = A$$

$$p(A / A \cup B) = \frac{p(A \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A)}{p(A \cup B)} = \frac{0'6}{0'68} = 0'088$$

- b. Son **compatibles** porque  $p(A \cap B) \neq 0$ . Se definen como compatibles aquellos sucesos de un mismo espacio probabilístico que pueden realizarse a la vez  
 Son **independientes** por que  $p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$

**Modelo 2006. 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

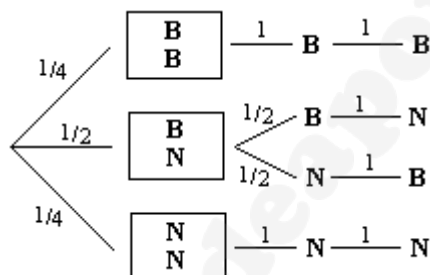
Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

**Solución.**

El ejercicio se puede representar con tres urnas con diferente relación de bolas y con diferente probabilidad de ser escogida.

- Dos bolas blancas:  $p(c) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Blanca/ Negra:  $p(c) \cdot p(x) + p(x) \cdot p(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- Dos bolas negras:  $p(x) \cdot p(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Diagrama en árbol:



Sucesos: A  $\equiv$  La segunda bola es blanca. B  $\equiv$  La primera bola extraída es blanca

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{p(B \cap A)}{p[(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})]} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1}{\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

**Septiembre 2005. Ejercicio 3A.** (Puntuación máxima 2 puntos)

En un colectivo de inversores bursátiles, el 20% realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80% consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20% consulta InfoBoIsaWeb. Se pide:

- Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
- Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBoIsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

**Solución.**

- a. Sucesos: A  $\equiv$  Hace operaciones vía Internet; B  $\equiv$  Consulta InfoBolsaWeb

Datos:  $p(A) = 0'2$ ;  $p\left(\frac{B}{A}\right) = 0'8$ ;  $p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = 0'2$

Se pide:  $p(B) = p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) \stackrel{\text{S. INCOMPATIBLES}}{=} p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \stackrel{\text{S. DEPENDIENTES}}{=} p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) + p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \{p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0'8\} = 0'2 \cdot 0'8 + 0'8 \cdot 0'2 = 0'32$

- b. Se pide:  $p\left(\frac{A}{B}\right) \stackrel{\text{BAYES}}{=} \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)}{0'32} = \frac{0'2 \cdot 0'8}{0'32} = 0'5$



**Septiembre 2005. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos, tales que  $p(A) = \frac{1}{2}$ ,  $p(\bar{B}) = \frac{2}{5}$  y  $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$ . Nota:  $\bar{A}$  representa el suceso complementario del suceso A. Calcular

- (a)  $p\left(\frac{B}{A}\right)$
- (b)  $p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$

**Solución.**

a.

$$p\left(\frac{B}{A}\right)^{\text{BAYES}} = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$p(A \cap B)$  se obtiene a partir de  $p(\bar{A} \cup \bar{B})$  aplicando las leyes de Morgan

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 1 - p(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

sustituyendo

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

b.

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)^{\text{BAYES}} = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)}$$

$$p(\bar{A} \cap B)^{\text{SOLO B}} = p(B) - p(A \cap B) \quad : \quad p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

sustituyendo

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$$

**Junio 2005. 3A.** (puntuación máxima: 2 puntos).

Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

- (a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
- (b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

**Solución.**

a.

$A_i \equiv$  el huevo extraído en la posición i está en buen estado.

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Sucesos dependientes, ha medida que sacamos un huevo de la caja se varia la proporción entre huevos en buen estado y rotos, por lo que la segunda y sucesivas extracciones se ve condicionada por la anteriores extracciones.

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= p(A_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{A_1 \cap A_2}\right) \cdot p\left(\frac{A_4}{A_1 \cap A_2 \cap A_3}\right) = \\ &= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33} \Leftrightarrow 42'42\% \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & p\left[(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\right] = \\ &= p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) + p(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) + p(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) + p(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \\ & \text{Resolviendo igual que en el apartado (a)} \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33} < 48\%$$

**Junio 2005. 3B.** (puntuación máxima: 2 puntos).

En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres unos", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4".

**Solución.**

El resultado de cada dado es independiente a los de los demás dados.

- "Obtener tres unos":  $p(1 \cap 1 \cap 1) = p(1) \cdot p(1) \cdot p(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$
- "Obtener al menos un dos"  $\equiv$  "caso contrario a ningún dos":  
 $p(\bar{2} \cap \bar{2} \cap \bar{2}) = 1 - (p(\bar{2}) \cdot p(\bar{2}) \cdot p(\bar{2})) = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$
- "Obtener tres números distintos":  $p(\text{Cualquier cara}) \cdot p(\text{Cualquiera excepto la } 1^a) \cdot p(\text{Cualquiera excepto la } 1^a \text{ y la } 2^a) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$ . También se puede hacer mediante combinatoria y la definición axiomática de probabilidad.  $p = \frac{V_6^3}{VR_6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$
- "Obtener una suma de 4":  $p = P_3^2 \cdot p(1 \cap 1 \cap 2) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$

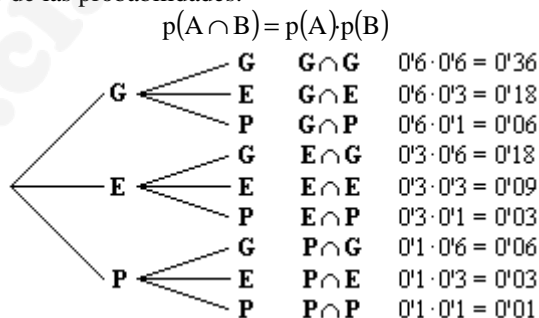
**Modelo 2005. 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0,6, la empata con probabilidad 0,3 y la pierde con probabilidad 0,1. El jugador juega dos partidas.

- Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno los resultados de este experimento aleatorio.
- Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

**Solución.**

a. La forma mas sencilla de describir el espacio muestral es mediante un diagrama en árbol. Si además se tiene en cuenta que los resultados de las partidas son independientes entre si, la probabilidad de las intersecciones es el producto de las probabilidades.



b.  $p(G \cup G) = p[(G \cap G) \cup (G \cap E) \cup (G \cap P) \cup (E \cap G) \cup (P \cap G)] =$   
 $= p(G \cap G) + p(G \cap E) + p(G \cap P) + p(E \cap P) + p(P \cap G) = 0'36 + 0'18 + 0'06 + 0'18 + 0'06 = 0'84$

**Modelo 2005. 3B.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

|                           | Chicas | Chicos |
|---------------------------|--------|--------|
| Científico- Tecnológica   | 64     | 52     |
| Humanidades y C. Sociales | 74     | 50     |

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2° de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

- a) No curse la opción Científico- Tecnológica.
- b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

**Solución.**

a.

|                           | Chicas | Chicos |     |
|---------------------------|--------|--------|-----|
| Científico- Tecnológica   | 64     | 52     | 116 |
| Humanidades y C. Sociales | 74     | 50     | 124 |
|                           | 138    | 102    | 240 |

Por la definición axiomática de probabilidad.

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{124}{240} = \frac{31}{60}$$

b. 
$$p = \frac{\text{C.F.}}{\text{C.P.}} = \frac{50}{102} = \frac{25}{51}$$

**Septiembre 2004. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

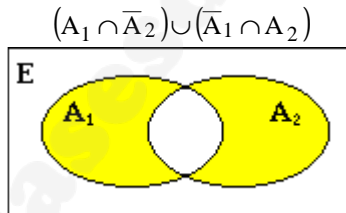
Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.

- (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active solo uno de los indicadores.
- (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

**Solución.**

a. Sucesos:  $A_1 \equiv$  Se activa el indicador 1;  $A_2 \equiv$  Se activa el indicador 2

Que se active solo uno de los indicadores es el suceso “solo  $A_1$  ó solo  $A_2$ ”, también denominado suceso diferencia simétrica.



$$p\left[\underbrace{(A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)}_{\text{Sucesos diferencia simétrica}}\right] = p(A_1 \cup A_2) - p(A_1 \cap A_2)$$

Por se sucesos independientes

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = 0'95 \cdot 0'90 = 0'855$$

Por ser sucesos compatibles

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) = 0'95 + 0'90 - 0'855 = 0'995$$

sustituyendo

$$p\left[(A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)\right] = 0'995 - 0'855 = 0'14$$

La probabilidad de que se active un o solo de los indicadores es del 14%

b. Al menos uno es que se cumpla  $A_1$  ó  $A_2$ , lo que equivale al suceso unión, cuya probabilidad se ha calculado en el apartado anterior

$$p(A_1 \cup A_2) = 0.995$$

**Septiembre 2004. Ejercicio 3B.** (Puntuación máxima 2 puntos)

En una población, el 40% son hombres y el 60% mujeres. En esa población el 80% de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionadas al fútbol.

- a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.
- b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

**Solución.**

- a. Sucesos:  $H \equiv$  Ser hombre  
 $M \equiv$  Ser mujer  
 $A \equiv$  Ser aficionado al fútbol
- Datos:  $p(H) = 0.40$      $p(M) = 0.60$   
 $p(A/H) = 0.80$      $p(A/M) = 0.20$

Aficionado = hombre **y** aficionado **Ó** mujer **y** aficionada  
 $p(A) = p[(H \cap A) \cup (M \cap A)]$

teniendo en cuenta que  $H \cap A$  y  $M \cap A$  son sucesos incompatibles:

$$p(A) = p[(H \cap A) \cup (M \cap A)] = p(H \cap A) + p(M \cap A)$$

y por ser sucesos dependientes, el ser aficionado tiene distinta probabilidad si se es hombre(80%) que si se es mujer(20%), la expresión queda:

$$p(A) = p(H \cap A) + p(M \cap A) = p(H) \cdot p(A/H) + p(M) \cdot p(A/M)$$

sustituyendo los datos

$$p(A) = p(H) \cdot p(A/H) + p(M) \cdot p(A/M) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$$

La probabilidad de ser aficionado al fútbol es del 44%.

**b.**

$$p(M/A) = \{T. BAYES\} = \frac{p(M \cap A)}{p(A)} = \frac{p(M) \cdot p(A/M)}{p(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.44} = 0.2727$$

La probabilidad de que un aficionado al fútbol sea mujer es del 27.27%.

Otra forma diferente de hacer el problema es mediante un cuadro de contingencia.

|               | HOMBRE                         | MUJER                          |                |
|---------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------|
| AFICIONADO    | $40 \cdot \frac{80}{100} = 32$ | $60 \cdot \frac{20}{100} = 12$ | $32 + 12 = 44$ |
| NO AFICIONADO | $40 - 32 = 8$                  | $60 - 12 = 48$                 | $8 + 48 = 56$  |
|               | <b>40</b>                      | <b>60</b>                      | <b>100</b>     |

Nota: Los valores en azul, se obtienen de los datos tomando como base de cálculos 100 individuos, los valores en rojo, se obtienen por sumas o restas.

Las probabilidades de los sucesos que se piden se calculan mediante la definición axiomática de probabilidad de Laplace.

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

a)  $p(A) = \frac{\text{Aficionados}}{\text{Totales}} = \frac{44}{100}$

b)  $p(H/A) = \frac{p(H \cap A)}{p(A)} = \frac{\text{Mujeres aficionadas}}{\text{Aficionados}} = \frac{12}{44} = \frac{3}{11}$

**Junio 2004. 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos).

Dos expertos,  $E_1$  y  $E_2$ , realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por  $E_1$  es 0.55 y por  $E_2$  es 0.45. Si una peritación

ha sido realizada por  $E_1$ , la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0'98 y si ha sido realizada por  $E_2$ , la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0'90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por  $E_2$ .

**Solución.**

Sucesos:

- $E_1 \equiv$  Peritación realizada por el experto 1.
- $E_2 \equiv$  Peritación realizada por el experto 2.
- $P \equiv$  La peritación da lugar al pago de una indemnización.

Datos:

- $p(E_1) = 0'55$        $p(E_2) = 0'45$
- $p\left(\frac{P}{E_1}\right) = 0'98$        $p\left(\frac{P}{E_2}\right) = 0'90$

Se pide calcular la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por el experto  $E_2$  condicionada a haber supuesto a la compañía el pago de una indemnización.

$$p\left(\frac{E_2}{P}\right)$$

Aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} p\left(\frac{E_2}{P}\right) &= \frac{p(E_2 \cap P)}{p(P)} = \frac{p(E_2 \cap P)}{p[(E_1 \cap P) \cup (E_2 \cap P)]} = \frac{p(E_2 \cap P)}{p(E_1 \cap P) + p(E_2 \cap P)} = \\ &= \frac{p(E_2) \cdot p\left(\frac{P}{E_2}\right)}{p(E_1) \cdot p\left(\frac{P}{E_1}\right) + p(E_2) \cdot p\left(\frac{P}{E_2}\right)} = \frac{0'45 \cdot 0'90}{0'55 \cdot 0'98 + 0'45 \cdot 0'90} = 0'4290 \\ p\left(\frac{E_2}{P}\right) &= 42'90\% \end{aligned}$$

También se puede hacer mediante un cuadro de contingencia

|       | $E_1$                              | $E_2$                              |   |
|-------|------------------------------------|------------------------------------|---|
| $P$   | $550 \times 0'98 =$<br><b>539</b>  | $450 \times 0'90 =$<br><b>405</b>  | $539 + 405 =$<br><b>944</b>                 |
| $P^C$ | $550 - 539 =$<br><b>11</b>         | $450 - 405 =$<br><b>45</b>         | $11 + 45 =$<br><b>56</b>                    |
|       | $1000 \times 0'55 =$<br><b>550</b> | $1000 \times 0'45 =$<br><b>450</b> | <i>Base de cálculo</i><br>1000 Peritaciones |

$P^C \equiv$  contrario de  $P$

$$p\left(\frac{E_2}{P}\right) = \frac{p(E_2 \cap P)}{p(P)} = \frac{405}{944} = 0'4290$$

**Junio 2004. 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos).**

En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

**Solución.**

Sucesos:

- $H \equiv$  La bombilla es halógena
- $B \equiv$  La bombilla es de bajo consumo
- $D \equiv$  La bombilla es defectuosa

Datos:

- $p(H) = \frac{3}{7}$        $p\left(\frac{D}{H}\right) = 0'02$

$$- p(B) = \frac{4}{7} \quad p(D/B) = 0'09$$

Se pide calcular la probabilidad de que una bombilla sea halógena condicionada a no ser defectuosa.

$$p(H/D)$$

aplicando el teorema de Bayes

$$p(H/D) = \frac{p(H \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{p(H \cap \bar{D})}{p[(H \cap \bar{D}) \cup (B \cap \bar{D})]} = \frac{p(H \cap \bar{D})}{p(H \cap \bar{D}) + p(B \cap \bar{D})} = \frac{p(H) \cdot p(\bar{D}/H)}{p(H) \cdot p(\bar{D}/H) + p(B) \cdot p(\bar{D}/B)}$$

Teniendo en cuenta que los sucesos  $(D/H)$  y  $(\bar{D}/H)$  son complementarios al igual que  $(B/H)$  y  $(\bar{B}/H)$ :

$$p(\bar{D}/H) = 1 - p(D/H) = 1 - 0'02 = 0'98$$

$$p(\bar{B}/H) = 1 - p(B/H) = 1 - 0'09 = 0'91$$

sustituyendo en la probabilidad pedida

$$p(H/D) = \frac{p(H) \cdot p(\bar{D}/H)}{p(H) \cdot p(\bar{D}/H) + p(B) \cdot p(\bar{D}/B)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 0'98}{\frac{3}{7} \cdot 0'98 + \frac{4}{7} \cdot 0'91} = 0'4468$$

$$p(H/D) = 44'68\%$$

También se puede hacer mediante un cuadro de contingencia

|                | H                     | B                      |                                  |
|----------------|-----------------------|------------------------|----------------------------------|
| D              | $300 \times 0'02 = 6$ | $400 \times 0'09 = 36$ | $6 + 36 = 42$                    |
| D <sup>C</sup> | $300 - 6 = 294$       | $400 - 36 = 364$       | $294 + 364 = 658$                |
|                | 300                   | 400                    | Base de cálculo<br>700 Bombillas |

D<sup>C</sup> ≡ contrario de D

$$p(H/D) = \frac{p(H \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{294}{658} = 0'4468$$

### Modelo 2004. 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

#### Solución.

Se define los siguientes sucesos.

A ≡ Regar el rosal; B ≡ El rosal se mantiene.

Datos:

$$p(B/A) = p(\bar{B}/A) = \frac{1}{2}$$

$$p(B/\bar{A}) = 0'25 = \frac{1}{4}$$

$$p(\bar{A}) = \frac{2}{3}; \quad p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Se pide:  $p(\bar{A}/B)$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{p(\bar{A})p(\bar{B}/\bar{A})}{p(A)p(\bar{B}/A) + p(\bar{A})p(\bar{B}/\bar{A})}$$

Se conocen todos los valores excepto  $p(\bar{B}/\bar{A})$ , pero teniendo en cuenta que:

$$p\left(\frac{B}{A}\right) + p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = 1 \text{ Sucesos complementarios}$$

$$p\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = 1 - p\left(\frac{B}{A}\right) = 1 - 0.25 = 0.75 = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

La probabilidad de que no se halla regado si al final se ha secado es del 75%.

Otra forma de resolver el problema es por un cuadro de contingencia:

|                        | Mantenerse (B) | No mantenerse ( $\bar{B}$ ) |     |
|------------------------|----------------|-----------------------------|-----|
| Regar (A)              | 50             | 50                          | 100 |
| No regar ( $\bar{A}$ ) | 50             | 150                         | 200 |
|                        | 100            | 200                         | 300 |

Base de cálculo

Base de cálculo. Puede servir cualquier número, si se escoge con criterio salen valores que resultan bastante lógicos.

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

**Modelo 2004. 3A.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sobre los sucesos A y B se conoce las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.7$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cap B) = 0.45$$

Calcular:

- a)  $P(B/A)$
- b)  $P(A^C \cap B^C)$

Nota:  $A^C$  representa el suceso complementario del suceso A.

**Solución.**

a. Según Bayes:

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0.45}{0.70} = \frac{9}{14} = 0.64$$

b. Teniendo en cuenta la ley de Morgan que dice:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$p(\overline{A \cap B}) = p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - p(A \cap B)$$

Siendo A y B son sucesos compatibles ( $A \cap B \neq \emptyset$ )

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Sustituyendo:

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B)) = 1 - (0.7 + 0.5 - 0.45) = 0.25$$

**Septiembre 2003. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0'99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0'05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0'99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

**Solución.**

Sucesos.

A ≡ El agua está contaminada

B ≡ El test da positivo

Datos.

$$p(\bar{A}) = 0'99 \text{ (Probabilidad de que el agua no este contaminada)}$$

$$p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = 0'05 \text{ (Probabilidad de que el test de positivo si el agua no está contaminada)}$$

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = 0'99 \text{ (Probabilidad de que el test de positivo si el agua está contaminada)}$$

Se pide:

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \{\text{BAYES}\} = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)} = \frac{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)}{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) + p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)}$$

El único valor de la expresión que falta por determinar es la probabilidad de A. Teniendo en cuenta que la probabilidad de un suceso y su complementario suman la unidad

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0'99 = 0'01$$

sustituyendo en la expresión

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)}{p(\bar{A}) \cdot p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) + p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{0'99 \cdot 0'05}{0'99 \cdot 0'05 + 0'01 \cdot 0'99} = 0'833$$

Si el test da positivo, existe una probabilidad del 83% de que esté equivocado, es decir, el test da 83'3% de falsos positivos(estando el agua libre de contaminación, el test dice que está contaminada)

El problema se puede resolver por cuadro de contingencia. Tomando como base de cálculo ó referencia 100 pruebas

|          | CONTAMINADA       | NO CONTAMINADA  |                    |
|----------|-------------------|-----------------|--------------------|
| POSITIVO | 99 x 0'05 = 4'95  | 1 x 0'99 = 0'99 | 4'95 + 0'99 = 5'94 |
| NEGATIVO | 99 - 4'95 = 94'05 | 1 - 0'99 = 0'01 | 100 - 5'94 = 94'06 |
|          | 99                | 100 - 99 = 1    | 100                |

Base de Cálculo

Por este método se emplea la definición axiomática de probabilidad

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Casos en los que el agua no está contaminada y el test da positivo}}{\text{Casos en los que el test da positivo}} = \frac{4'95}{5'94}$$

$$p(A) = 0'83$$

**Septiembre 2003. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 ó por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

**Solución.**

$$A \equiv \text{múltiplos de 2} \in [1, 20] = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}. p(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$B \equiv \text{múltiplos de 3} \in [1, 20] = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}. p(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$



$A \cap B \equiv$  múltiplos de 2 y de 3  $\in [1, 20] = \{6, 12, 18\}$ .  $p(A \cap B) = \frac{3}{20}$

a.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ , por ser A y B sucesos compatibles.

$$p(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

b. Para que un número sea divisible por 3 pero no por 6, debe ser divisible por 3 pero no por 2.

$p(\overline{A \cap B}) = p(B) - p(A \cap B)$  Suceso diferencia (solo B).

$$p(\overline{A \cap B}) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{3}{20}$$

**Junio 2003. 3A.** (puntuación máxima: 2 puntos).

El 45% del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35% al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) Las tres personas votan al candidato A.
- (b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.
- (c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

**Solución.**

Se definen los siguientes sucesos

A  $\equiv$  vota al candidato A

B  $\equiv$  vota al candidato B

V  $\equiv$  vota

N  $\equiv$  no vota

Los sucesos A, B y N son incompatibles entre sí. El voto de una persona es independiente al voto de las demás.

a.  $p(A \cap A \cap A) = p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) = 0,45^3 = 0,0911$ .  $p(A \cap A \cap A) = 9,11\%$

b.  $p[(A \cap A \cap B) \cup (A \cap B \cap A) \cup (B \cap A \cap A)] = p(A \cap A \cap B) + p(A \cap B \cap A) + p(B \cap A \cap A) = p(A) \cdot p(A) \cdot p(B) + p(A) \cdot p(B) \cdot p(A) + p(B) \cdot p(A) \cdot p(A) = 3 \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(B) = 3 \cdot 0,45 \cdot 0,45 \cdot 0,35 = 0,2126$

La probabilidad de que dos personas voten al candidato A y otra al candidato B es del 21,26%.

c. El suceso al menos una persona se abstiene, es el caso contrario de que todos votan  $p(\text{al menos un votante se abstiene}) = p(\overline{V \cap V \cap V}) = 1 - p(V \cap V \cap V) = 1 - (p(V) \cdot p(V) \cdot p(V))$

$$p(V) = p(A) + p(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80$$

$$p(\text{al menos un votante se abstiene}) = 1 - 0,8^3 = 0,488$$

La probabilidad de que al menos uno se abstenga es del 48,8%

**Junio 2003. 3B.** (puntuación máxima: 2 puntos).

De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar.

Determinar la probabilidad de obtener:

- (a) Tres reyes
- (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
- (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

**Solución.**

Se trata de la extracción de tres cartas consecutivas de una baraja sin remplazamiento por lo que la segunda extracción estará condicionada por el resultado de la primera extracción, y la tercera extracción estará condicionada por el resultado de las dos primeras. Sucesos Dependientes.

$A_i \equiv$  carta A en la extracción i

a.  $p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_1) \cdot p\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot p\left(\frac{R_3}{R_1 \cap R_2}\right) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

$$b. \quad p(F_1 \cap 5_2 \cap 6_3) = p(F_1) \cdot p\left(\frac{5_2}{F_1}\right) \cdot p\left(\frac{6_3}{F_1 \cap 5_2}\right) = \frac{12}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{5}{38} = \frac{5}{988}$$

$$c. \quad p(A \cap 3 \cap 6) = P_3 \cdot p(A_1 \cap 3_2 \cap 6_3) = 3! \cdot p(A_1) \cdot p\left(\frac{3_2}{A_1}\right) \cdot p\left(\frac{6_3}{A_1 \cap 3_2}\right) = \\ = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{8}{1235}$$

**Septiembre 2002. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0.3,

- ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?
- ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento? ¿y de llevárselo exactamente en el segundo?

**Solución:**

a) Se considera que la prueba consiste en lanzar dardos hasta dar en la diana y como máximo lanzar tres dardos, y en el momento que de en la diana acaba la prueba.

Si se denomina como  $A_1$  acierta en la 1ª tirada,  $A_2$  acierta en la 2ª tirada y  $A_3$  acierta en la 3ª tirada, el suceso que nos piden es  $A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$ .

$$p(A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) = p(A_1) + p(\bar{A}_1 \cap A_2) + p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \\ = p(A_1) + p(\bar{A}_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{\bar{A}_1}\right) + p(\bar{A}_1) \cdot p\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}\right) = \\ = 0'3 + 0'7 \cdot 0'3 + 0'7 \cdot 0'7 \cdot 0'3 = 0'675$$

La probabilidad de que se lleve 1 peluche es del 67'5%

$$b. \quad \text{Se lleva el peluche exactamente en el tercer intento} \equiv (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\ p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = p(\bar{A}_1) \cdot p\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}\right) = 0'7 \cdot 0'7 \cdot 0'3 = 0'147$$

$$\text{Se lleva el peluche exactamente en el segundo intento} \equiv (\bar{A}_1 \cap A_2) \\ p(\bar{A}_1 \cap A_2) = p(\bar{A}_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{\bar{A}_1}\right) = 0'7 \cdot 0'3 = 0'21$$

**Septiembre 2002. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)**

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjetas de crédito.

- ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?
- Si la compra es inferior a 150, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

**Solución:**

Se plantea un problema de probabilidad condicionada entre sucesos dependientes. El espacio muestral son las ventas totales pagadas con tarjeta V ó MC (400 + 350 = 750).

Sucesos:

- $V \equiv$  Ventas pagadas con V
- $M \equiv$  Ventas pagadas con MC
- $S \equiv$  Ventas que superan los 150 €

Datos:

- Probabilidad de que una compra sea pagada con V:  $p(V) = \frac{400}{750} = \frac{8}{15}$
- Probabilidad de que una compra sea pagada con MC:  $p(M) = \frac{350}{750} = \frac{7}{15}$
- Probabilidad de que una compra pagada con V supere los 150 €:  $p\left(\frac{S}{V}\right) = \frac{150}{400} = \frac{3}{8}$
- Probabilidad de que una compra pagada con MC supere los 150 €:  $p\left(\frac{S}{M}\right) = \frac{300}{350} = \frac{6}{7}$

a. Sí una compra supere los 150 € será “pagada con tarjeta V y supera los 150 € ó pagada con la tarjeta MC y supera los 150 €.

$$p(S) = p[(V \cap S) \cup (M \cap S)] = \{\text{Suc. incompatibles}\} = p(V \cap S) + p(M \cap S) = \{\text{Suc. dependientes}\} =$$

$$= p(V) \cdot p\left(\frac{S}{V}\right) + p(M) \cdot p\left(\frac{S}{M}\right) = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{5}$$

b. Se pide calcular una probabilidad condicionada. Aplicando la teorema de Bayes:

$$p\left(\frac{M}{S}\right) = \frac{p(M \cap S)}{p(S)} = \frac{p(M \cap S)}{p(S)} = \left\{ \begin{array}{l} p(M \cap S) = p(M) \cdot p\left(\frac{S}{M}\right) = \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{5} \\ p(S) = \frac{3}{5} \end{array} \right\} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

**Junio 2002. 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos).**

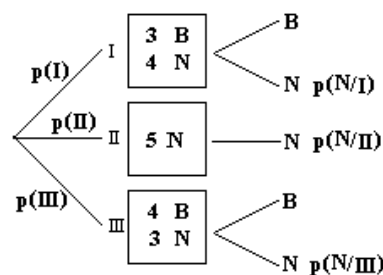
Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y cuatro negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y tres negras.

- (a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?
- (b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

**Solución.**

Se pide calcular la probabilidad de obtener negra sacando una bola al azar de una de las tres urnas también seleccionada al azar. Teniendo en cuenta que las proporciones de bolas en las tres urnas es diferente, se definen los sucesos elementales mediante la definición axiomática de Laplace.

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$



$$p(I) = p(II) = p(III) = \frac{1}{3}; \quad p\left(\frac{N}{I}\right) = \frac{4}{7}; \quad p\left(\frac{N}{II}\right) = 1; \quad p\left(\frac{N}{III}\right) = \frac{3}{7}$$

a.  $p(N) = p[(I \cap N) \cup (II \cap N) \cup (III \cap N)] = \{\text{S. incompatibles}\} = p(I \cap N) + p(II \cap N) + p(III \cap N)$

teniendo en cuenta que la probabilidad de negra depende de la urna elegida

$$p(N) = p(I \cap N) + p(II \cap N) + p(III \cap N) = p(I) \cdot p\left(\frac{N}{I}\right) + p(II) \cdot p\left(\frac{N}{II}\right) + p(III) \cdot p\left(\frac{N}{III}\right)$$

$$p(N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b.  $p\left(\frac{\Pi}{N}\right)$  Aplicando el teorema de Bayes:

$$p\left(\frac{\Pi}{N}\right) = \frac{p(\Pi \cap N)}{p(N)} = \frac{p(\Pi) \cdot p\left(\frac{N}{\Pi}\right)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

**Junio 2002. 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos).**

Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:

- a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
- b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

**Solución.**

Suceso A  $\equiv$  Al lanzar dos dados sale el seis doble.  $p(A) = \frac{1}{36}$

Suceso B  $\equiv$  Al lanzar dos dados sale un doble distinto del seis doble.  $p(B) = \frac{5}{36}$

a. El lanzamiento consecutivo de dados son pruebas independientes

$$p(A \cap A \cap A) = p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) = \left(\frac{1}{36}\right)^3$$

b.  $p(B \cap B \cap B) = p(B) \cdot p(B) \cdot p(B) = \left(\frac{5}{36}\right)^3$

**Septiembre 2001. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

- (a) Los tres escojan la misma película.
- (b) Dos escojan la película A y el otro la C.

**Solución.**

Sucesos:  $A_i \equiv$  Escoge la copia A el cliente  $i(1, 2, 3)$   
 $B_i \equiv$  Escoge la copia B el cliente  $i(1, 2, 3)$   
 $C_i \equiv$  Escoge la copia C el cliente  $i(1, 2, 3)$

a. Los tres escojan la misma película  $\equiv (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap C_3)$  teniendo en cuenta que los sucesos “los tres escogen la película A”, “los tres escogen la película B”, “los tres escogen la película C” son incompatibles, la probabilidad de su unión será la suma de cada una de ellas según:

$$p[(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap C_3)] = p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

para resolver la intersección se tiene en cuenta que los sucesos son dependientes:

$$\begin{aligned} &= p(A_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{A_1 \cap A_2}\right) + p(B_1) \cdot p\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \cdot p\left(\frac{B_3}{B_1 \cap B_2}\right) + p(C_1) \cdot p\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \cdot p\left(\frac{C_3}{C_1 \cap C_2}\right) = \\ &= \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20} + \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} + \frac{5}{22} \cdot \frac{4}{21} \cdot \frac{3}{20} = \frac{15}{154} \end{aligned}$$

b. Dos escojan A y el otro C  $\equiv (A_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap A_3)$  se trata de la misma forma que el anterior caso

$$\begin{aligned} &p[(A_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap A_3)] = \\ &= p(A_1 \cap A_2 \cap C_3) + p(A_1 \cap C_2 \cap A_3) + p(C_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= p(A_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot p\left(\frac{C_3}{A_1 \cap A_2}\right) + p(A_1) \cdot p\left(\frac{C_2}{A_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{A_1 \cap C_2}\right) + p(C_1) \cdot p\left(\frac{A_2}{C_1}\right) \cdot p\left(\frac{A_3}{C_1 \cap A_2}\right) = \\ &= \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{5}{20} + \frac{8}{22} \cdot \frac{5}{21} \cdot \frac{7}{20} + \frac{5}{22} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

**Septiembre 2001. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

- (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?
- (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

**Solución.**

Suceso:  $A_i \equiv$  Le toca el premio  $i$

a. 
$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{2}{500}$$

b. La probabilidad de que le toque al menos uno de los premios, es el caso contrario de que no le toque ninguno.

$$p(A_1 \cup A_2) = p(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - p(\overline{A_1}) \cdot p\left(\frac{\overline{A_2}}{\overline{A_1}}\right) = 1 - \frac{498}{500} \cdot \frac{497}{499} = 8 \times 10^{-3}$$

$$p(A_1 \cup A_2) = 0,3 \%$$

**Junio 2001. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos)**

Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son de tipo A y el 30% de tipo B. El 30% de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30% de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20% de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

- (a) El coche es del modelo C.
- (b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel.
- (c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.

**Solución.**

Problema de probabilidad condicionada. Se puede resolver de dos formas diferentes, por diagrama de contingencia o por álgebra de sucesos.

I) Diagrama de contingencia:

Tomando como base de cálculo 100 coches producidos por la fábrica

|          | A                              | B                             | C                      |                 |
|----------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------|-----------------|
| Gasolina | $60 - 18 = 42$                 | $30 - 6 = 24$                 | $70 - 42 - 24 = 4$     | $100 - 30 = 70$ |
| Diesel   | $\frac{30}{100} \cdot 60 = 18$ | $\frac{20}{100} \cdot 30 = 6$ | $30 - 18 - 6 = 6$      | 30              |
|          | 60                             | 30                            | $100 - (60 + 30) = 10$ | 100             |

Una vez completado el cuadro de contingencia las probabilidades pedidas se calculan por la definición axiomática de probabilidad.

$$p(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos - favorables}}{\text{n}^\circ \text{ casos - posibles}}$$

- a)  $p(C) = \frac{10}{100} = 0,1$  ó del 10%
- b)  $p\left(\frac{A}{D}\right) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{18}{30} = 0,6$  ó del 60%
- c)  $p\left(\frac{D}{C}\right) = \frac{p(D \cap C)}{p(C)} = \frac{6}{10} = 0,6$  ó del 60%

II) Álgebra de sucesos:

- A = el coche es del modelo A.
- B = el coche es del modelo B.
- C = el coche es del modelo C.

D = el coche tiene motor diesel.  
G = el coche tiene motor gasolina.

Datos:  $p(A) = 0,6$ .  $p(B) = 0,3$ .  $p(D) = 0,3$ .  $p(D/A) = 0,3$ .  $p(D/B) = 0,2$ .

- a) Se pide calcular  $p(C)$  ; Puesto que solo hay coches de los moldes A, B y C ( $p(A \cup B \cup C) = 1$ ). Teniendo en cuenta que un mismo coche no puede ser de dos modelos diferentes, los sucesos A, B, y C, son incompatibles y por tanto:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = 1$$

$$p(C) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$$

- b)  $p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)}$  : Puesto que el tipo de motor y el modelo de coche son sucesos dependientes,

la  $p(A \cap D)$  se calculan por el teorema de la probabilidad total:  $P(A \cap D) = p(A) \cdot p(D/A)$

Sustituyendo:

$$p(A/D) = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{p(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,3} = 0,6$$

- c)  $p(D/C) = p[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D)$

$$p(C \cap D) = p(D) - p(A \cap D) - p(B \cap D) = p(D) - p(A) \cdot p(D/A) - p(B) \cdot p(D/B) = 0,3 - 0,6 \cdot 0,3 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$$

$$p(D/C) = \frac{0,06}{0,1} = 0,6$$

### Junio 2001. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, de 0,02 para B y de 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

#### Solución.

Sucesos:

A  $\equiv$  tornillo fabricado por A

B  $\equiv$  tornillo fabricado por B

C  $\equiv$  tornillo fabricado por C

D  $\equiv$  tornillo defectuoso

Datos:

$$p(A) = \frac{600}{1000} = 0,6$$

$$p(D/A) = 0,01$$

$$p(\bar{D}/A) = 0,99$$

$$p(B) = \frac{300}{1000} = 0,3$$

$$p(D/B) = 0,02$$

$$p(\bar{D}/B) = 0,98$$

$$p(C) = \frac{100}{1000} = 0,1$$

$$p(D/C) = 0,03$$

$$p(\bar{D}/C) = 0,97$$

- a.  $p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - p((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)) = 1 - (p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D)) =$

$$= 1 - (p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C)) = 1 - (0,6 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,03) = 0,985$$

- b. Se pide calcular la una probabilidad condicionada, aplicando Bayes:

$$p\left(\frac{A}{\bar{D}}\right) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{p(A) \cdot p\left(\frac{\bar{D}}{A}\right)}{p(\bar{D})} = \frac{0'6 \cdot 0'99}{0'985} = 0'603$$

**Septiembre 1999. Ejercicio 4A.** (Puntuación máxima: 2 puntos) Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

A ≡ Se obtiene cinco en alguno de los dados.

B ≡ Se obtiene un doble (los dados presentan la misma puntuación)

- a)  $A \cap B$                       b)  $A \cup B$ .

**Solución**

Las probabilidades de los sucesos elementales  $p(A)$  y  $p(B)$ , se calculan por la definición axiomática de probabilidad  $p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$

Se calculan a partir del espacio muestral (E).  $\text{Card } E(\text{cardinal de } A) = \text{VR}_{6,2} = 6^2 = 36$

$A \equiv \{1-5; 2-5; 3-5; 4-5; 5-5; 6-5; 5-1; 5-2; 5-3; 5-4; 5-6\}$ .  $\text{Card } A = 11$

$B \equiv \{1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 5-5; 6-6\}$ .  $\text{Card } B = 6$

$$p(A) = \frac{11}{36} \qquad p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- a)  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 11/36 \cdot 1/6 = 1/36$  por ser A y B sucesos independientes  
 b)  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$  por ser sucesos compatibles

Otra forma puede ser calculando los sucesos  $A \cup B$  y  $A \cap B$ , a partir del espacio muestral y aplicando a continuación la definición axiomática.

$A \cap B \equiv \{5-5\}$ .  $\text{Card } (A \cap B) = 1$

$A \cup B \equiv \{1-5; 2-5; 3-5; 4-5; 5-5; 6-5; 1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 6-6\}$ .  $\text{Card } (A \cup B) = 11$

- a)  $p(A \cap B) = 1/36$   
 b)  $p(A \cup B) = 11/36$

**Septiembre 1999. 3B.** (Puntuación máxima 3 puntos)

Se toman 4 cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo en la mesa y se mezclan al azar. Determínese la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

**Solución**

El ejercicio se puede realizar de dos formas diferentes:

Por la definición axiomática de probabilidad;  $p(A) = \frac{\text{Casos favorables (Cardinal de } A)}{\text{Casos Posibles (Cardinal de } E)}$

calculando el número de elementos de A y E mediante la combinatoria(Permutaciones).

$$\text{Card } (A) = 2; \text{Card}(E) = P_4 = 4! = 24 \Rightarrow p(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Como probabilidad condicionada, } p(5_I) \cdot p\left(\frac{5_{II}}{5_I}\right) \cdot p\left(\frac{6_{III}}{(5_I \cap 5_{II})}\right) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$