Modelo 2013. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$, donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios.
b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos? ¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

Solución.
a. La función de beneficios (B(x)) es ventas menos costes.

$$B(x) = V(x) - C(x) = 490x - \left(x^2 + 40x + 30000\right) = -x^2 + 450x - 30000$$

b. El número de hornos microondas que se deben fabricar y vender para obtener un beneficio máximo se calcula derivando la función de beneficios e igualando a cero.

$$B'(x) = -2x + 450 = 0 \;\; ; \;\; x = \frac{450}{2} = 225 \text{ hornos microondas}$$

Para comprobar que el extremo calculado es un máximo, se utiliza el criterio de la segunda derivada.

$$B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Para calcular el beneficio máximo se sustituye el valor de x en la función de beneficios.

$$B(225) = -225^2 + 450 \cdot 225 - 30000 = 20625\ €$$

Fabricando y vendiendo 225 hornos microondas, se obtiene un beneficio máximo de 20625 €.

Junio 2012. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uva de la finca sea máxima.

Solución.
$x \equiv$ número de cepas que se deben añadir a la finca

Producción = número de cepas × producción por cepa

$$P(x) = (1200 + x) \cdot (16 - 0{,}01x)$$

Multiplicando y ordenando se obtiene una función polinómica de segundo grado.

$$P(x) = 19200 + 4x - 0{,}01x^2$$

El máximo de la función se obtiene derivando e igualando a cero.

$$p'(x) = 4 - 0{,}02x$$

$$p'(x) = 0 \;\; ; \;\; 4 - 0{,}02x = 0 \;\; , \;\; x = \frac{4}{0{,}02} = 200$$

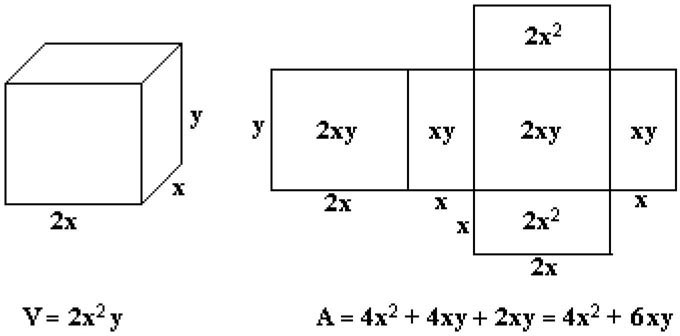
Para comprobar que es un máximo se sustituye en la segunda derivada.

$$P''(x) = -0{,}02 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Para obtener una producción máxima hay que plantar 200 cepas.

Modelo 2012. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlese las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

Solución.



Se pide optimizar el área lateral de la caja conocido su volumen.

$$\left.\begin{array}{l} A = 4x^2 + 6xy \\ 9000 = 2x^2 y \end{array}\right\} : \left.\begin{array}{l} A = 4x^2 + 6xy \\ y = \frac{9000}{2x^2} = \frac{4500}{x^2} \end{array}\right\} : A = 4x^2 + 6x\frac{4500}{x^2} : A = 4x^2 + \frac{27000}{x}$$

$$A = 4x^2 + 27000x^{-1} : A' = 8x + 27000 \cdot (-1)x^{-2} = 8x - \frac{27000}{x^2}$$

El mínimo se calcula igualando la primera derivada a cero.

$$A' = 0 : 8x - \frac{27000}{x^2} = 0 : x^3 = \frac{27000}{8} : x = \sqrt[3]{3275} = 15 \to y = \frac{4500}{15^2} = 20$$

Para confirmar que se trata de un mínimo se sustituye la raíz de la primera derivada en la segunda derivada

$$A' = 8x - 27000x^{-2} : A'' = 8 - 27000 \cdot (-2)x^{-3} = 8 + \frac{54000}{x^3}$$

$$A''(15) = 8 + \frac{54000}{15^3} > 0 \text{ Mínimo}$$

Las dimensiones de la caja de 9000 cm^3 y área lateral mínima deben se 30×15×20 cm

Septiembre 2011. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2, calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución.

a. El área de un rectángulo de dimensiones x e y es:

$$A = x \cdot y$$

Si el perímetro del rectángulo es 12 m

$$x + y = 12$$

Esta igualdad permite relacionar las dos variables.

$$y = 12 - x$$

El área de todos los rectángulos de perímetro 12 m en función de la longitud de la base es:

$$A = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2$$

Las dimensiones del rectángulo de área máxima se obtienen derivando e igualando a cero.

$$A' = 12 - 2x \; ; \; A' = 0 \; ; \; 12 - 2x = 0 \; ; \; x = 6 \Rightarrow y = 12 - x = 12 - 6 = 6$$

Para confirmar que es un máximo se utiliza el criterio de la segunda derivada (Máximo $A'' < 0$).

$$A'' = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

El rectángulo de área máxima y perímetro 12 m es el cuadrado de lado 6 m.

b. El perímetro de un rectángulo de dimensiones x e y es:

$$P = 2x + 2y$$

Si el área de triángulo de de 36 m^2, se cumplirá:

$$x \cdot y = 36$$

Esta igualdad permite relacionar las dos variables.

$$y = \frac{36}{x}$$

El perímetro de todos los rectángulos de área 36 m^2 en función de la longitud de la base es:

$$P = 2x + 2\frac{36}{x} = 2x + \frac{72}{x}$$

Las dimensiones del rectángulo de perímetro mínimo se obtienen derivando e igualando a cero.

$$P' = 2 - \frac{72}{x^2} \ ; \ P' = 0 \ ; \ 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \ ; \ x = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \Rightarrow y = \frac{36}{\pm 6} = \pm 6$$

Solo tienen sentido los valores positivos (x = 6m, y = 6m)

Para confirmar que es un mínimo se utiliza el criterio de la segunda derivada (Mínimo $A'' > 0$).

$$P'' = \frac{144}{x^3} \Rightarrow P''(6) = \frac{144}{6^3} > 0$$

El rectángulo de perímetro mínimo y área 36 m^2 es el cuadrado de lado 6 m.

Aclaraciones: $\left(\frac{72}{x}\right)' = \left(72x^{-1}\right)' = -72x^{-2} = -\frac{72}{x^2}$; $\left(-\frac{72}{x^2}\right)' = \left(-72x^{-2}\right) = -72\cdot(-2)x^{-3} = \frac{144}{x^3} \times$

Modelo 2011. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

a) Calcúlese a y b para que la función f tenga un máximo relativo en x = 1 y un mínimo relativo en x = 2.

Solución.

a. En primer lugar, forzaremos que la derivada de la función en los puntos x = 1 y x = 2 sea igual a 0, condición necesaria (pero no suficiente) para que un punto pueda ser vértice (máximo / mínimo).

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \ ; \ \begin{cases} f'(1) = 6\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \\ f'(2) = 6\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b = 0 \end{cases} ; \ \begin{cases} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -24 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones se calculan los valores de los parámetros a y b.

$$a = -9;\ b = 12$$

Para estos valores de a y b calculados, se comprueba la condición de máximo y mínimo con la segunda derivada sabiendo que:

- Un punto con derivada primera igual a 0 es máximo si la segunda derivada en ese punto es negativa.
- Un punto con derivada primera igual a 0 es mínimo si la segunda derivada en ese punto es positiva.

$$f''(x) = 12x - 18 : \begin{cases} f''(1) = 12\cdot 1 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 12\cdot 2 - 18 = +6 < 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

Modelo 2011. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa produce cable de fibra óptica que vende a un precio de x euros el metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

a) Obtener la función I(x) que determina los ingresos diarios de la empresa en función de x.
b) Calcular el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcular dicho ingreso máximo.

Solución.

a. En primer lugar hay que tener en cuenta que la función f(x) viene expresa miles de metros, mientras que la x expresa el precio en euros de un metro. Por lo tanto, a la hora de definir los ingresos habrá que multiplicar el precio de un metro por 1000 para obtener el precio de miles de metros. La función de ingresos vendrá representada por la multiplicación de lo que se vende (representado en f(x)) por el precio en miles de metros, es decir:

$$I(x) = 1000x \cdot \frac{6}{x^2+1} = \frac{6000x}{x^2+1}$$

b. Se pide calcular el punto de máximo de la función de ingresos. El máximo se localiza en los puntos donde la primera derivada se anula y la segunda es negativa.

$$I'(x) = \frac{6000 \cdot (x^2+1) - 6000x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 6000 \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$I'(x) = 0 \qquad 6000 \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad 1-x^2 = 0 \qquad x = \pm 1$$

$$I''(x) = 6000 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = 6000 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+1) - (1-x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$I''(x) = 6000 \cdot \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} : \begin{cases} I''(-1) = 6000 \cdot \dfrac{2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)}{((-1)^2+1)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ I''(1) = 6000 \cdot \dfrac{2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1}{(1^2+1)^3} < 0 \Rightarrow \text{Maximo} \end{cases}$$

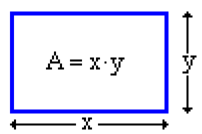
$$I(1) = \frac{6000 \cdot 1}{1^2+1} = 3000€$$

Se obtienen unos ingresos máximos de 3000 € con un precio de 1 €/m

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlese sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución.



Sean x la longitud de la base e y la de la altura del marco. El coste de construcción de cualquier marco en función de x e y viene dado por la expresión:

$$P(x, y) = 25 \cdot 2x + 50 \cdot 2y = 50x + 100y$$

Si al marco se le pone la condición de área igual a 2 m^2, se puede expresar el precio en función de la longitud de la base solamente, usando la igualdad del área para expresar y en función de x.

$$\left.\begin{array}{l} P(x, y) = 50x + 100y \\ 2 = x \cdot y \ : \ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} : P(x) = 50x + 100\frac{2}{x} = 50x + \frac{200}{x}$$

para obtener la longitud de la base del marco de 2 m^2 que nos de el precio mínimo, se deriva la expresión y se iguala a cero, procediendo a continuación de igual forma que en los extremos relativos (máx/mín) de las funciones.

$$P'(x) = 50 - \frac{200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0: \qquad 50 - \frac{200}{x^2} = 0: \qquad x^2 = 4: \qquad x = \pm 2$$

El valor negativo no tiene sentido al tratarse de una longitud. Para comprobar que el valor positivo da un precio mínimo, se sustituye en la segunda derivada.

$$P''(x) = \frac{400}{x^3}: \; P''(2) = \frac{400}{2^3} > 0 \;\Rightarrow \text{En } x = 2\text{, la función alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones que hacen coste mínimo son: $\begin{cases} \text{largo}: x = 2 \text{ m} \\ \text{ancho}: y \underset{y=2/x}{=} \frac{2}{2} = 1 \text{ m} \end{cases}$

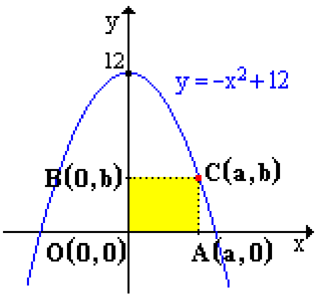
El coste mínimo es: $P(2,1) = 50 \cdot 2 + 100 \cdot 1 = 200$ €

Junio 2010. F.G. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el rectángulo (R) de vértices BOAC con B(0, b), O(0, 0), A(a, 0), C(a, b), a > 0, b> 0, y cuyo vértice C está situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$.

a) Para a = 3, determínense las coordenadas de los vértices de (R) y calcúlese el área de (R).
b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R) sea máxima.
c) Calcúlese el valor de dicha área máxima.

Solución.



a. Aunque no es obligatorio, recomiendo que se dibuje el recinto al que hace alusión el enunciado.

$$\text{Si } a = 3 \Rightarrow b = -3^2 + 12 = 3$$

Vértices: O (0, 0); A (3, 0); C (3, 3) D (0, 3)

b. El área del rectángulo viene determinada por:

$$\text{Área} = a \cdot b$$

Teniendo en cuenta que el punto C pertenece a la parábola $y = -x^2 + 12$, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la parábola, igualdad que permite establecer una relación entre a y b, que llevada a la expresión del área, permitirá expresar el área en función de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{r} A = a \cdot b \\ b = -a^2 + 12 \end{array}\right\}: A = a \cdot \left(-a^2 + 12\right) = -a^3 + 12a$$

El máximo se encuentra derivando e igualando a cero.

$$A' = -3a^2 + 12 \;;\; A' = 0 \;;\; -3a^2 + 12 = 0 \;;\; a = \pm\sqrt{\frac{12}{3}} = \pm 2$$

Teniendo en cuenta que las longitudes solo pueden ser positivas y que el enunciado informa que a > 0, el posible valor de a es 2.

Para comprobar se sustituye en la segunda derivada.

$$A'' = -6a \;;\; A''(2) = -6 \cdot 2 = -12 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

Conocido el valor de a se calcula el de b.

$$b = -2^2 + 12 = 8$$

Para que el área sea máxima, los vértices de R deben ser:

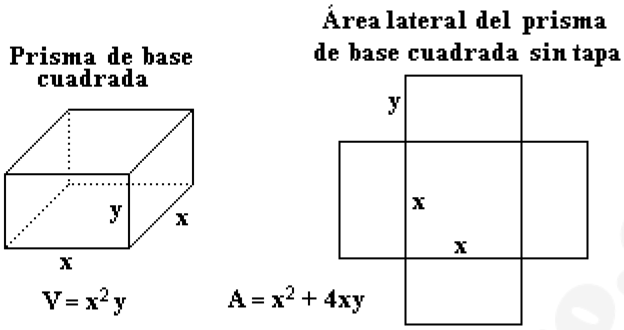
O (0, 0); A (2, 0); C (2, 8) D (0, 8)

c. Área = 2 · 8 = 16 u^2.

Septiembre 2008. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Solución.

Se pide dimensionar un prisma de base cuadrada para que el área lateral del prisma sin tapa sea mínima.



El volumen del prisma permite relacionar las variables x e y, y obtener el área en función de una sola variable.

$$500 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$A = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

El mínimo se calcula derivando e igualando a cero.

$$A' = 2x - \frac{2000}{x^2}$$

$$A' = 0: \quad 2x - \frac{2000}{x^2} = 0: \quad 2x = \frac{2000}{x^2}: \quad x^3 = 1000: \quad x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\text{Si } x = 10: \quad y = \frac{500}{10^2} = 5$$

Comprobación.

$$A'' = 2 + \frac{4000}{x^3}: \quad A''(10) = 2 + \frac{4000}{10^3} = 6 > 0 \quad \text{mínimo}$$

Junio 2005. 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos).

La función

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo *x* el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución.

Los máximos de una función están en aquellos puntos donde la primera derivada es nula y la segunda derivada es menor que cero.

Los posibles puntos de máximos serán las raíces de la derivada primera.

$$B'(x) = \frac{(-2x+9)\cdot x - (-x^2 + 9x - 16)\cdot 1}{x^2} = \frac{16 - x^2}{x^2} = 0 \quad : \quad 16 - x^2 = 0 : \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Para saber si son máximo ó mínimos se sustituyen en la segunda derivada.

$$B''(x)=\frac{-2x\cdot x^2-\left(16-x^2\right)\cdot 2x}{x^4}=-\frac{32}{x^3}:\begin{cases}B''(-4)=-\dfrac{32}{(-4)^3}=\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow x=-4\ \exists\ \text{un mínimo}\\ B''(4)=-\dfrac{32}{4^3}=-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow x=4\ \exists\ \text{un máximo}\end{cases}$$

El máximo beneficio se produce cuando se venden 4 artículos, siendo el beneficio máximo:

$$B(4)=\frac{-4^2+9\cdot 4-16}{4}=1<>1000\text{ €}$$

Septiembre 2001. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3$$

Calcúlense:

c. El valor de x para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f (x).

Solución.

c. Se pide hallar el máximo de la función que expresa la pendiente de las rectas tangentes a la función, que es la función derivada, por lo tanto se pide hallar el máximo de la de la función derivada. Si para hallar el máximo se deriva la función, los puntos de la función de pendiente máxima serán aquellos que su segunda derivada sea nula y su tercera derivada sea negativa, es decir un punto de inflexión cóncavo-convexo.

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3\quad:\quad f'(x)=4x-x^2$$

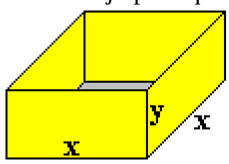
$$f''(x)=4-2x=0:x=2:f'''(x)=-2<0$$

En el punto $(2,f(2))=\left(2,\frac{16}{3}\right)$ la tangente a la función tiene pendiente máxima

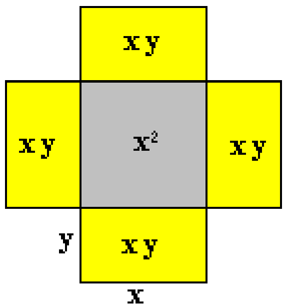
Junio 2001. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

Solución



Se pide minimizar el área lateral de un paralelepípedo de base cuadra sin tapa



Abriendo el cubo por las arista verticales y extendiéndolo sobre una superficies, queda la siguiente figura, el área en función de la longitud del lado del cuadrado(x) y de la altura(y) es:

AREA LATERAL ≡ A (x, y) = $4xy+x^2$

Restringiendo la función ha aquellas cuyo volumen sea 500 cm^3, se consigue expresar el área lateral en función de una sola variable

$$\left.\begin{array}{l}A_L(x,y)=4xy+x^2\\ V=500=x^2y:y=\dfrac{500}{x^2}\end{array}\right\}\Rightarrow A_L(x)=4x\frac{500}{x^2}+x^2$$

ordenando y simplificando

$$A_L(x)=x^2+\frac{2000}{x}$$

Para obtener el mínimo de la función, se iguala a cero su primera derivada, y en los valores que la anulen se estudia el signo de la segunda derivada, debiendo ser positiva

$$A'_L = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{2000}{x^2} \qquad 2x^3 = 2000 \qquad ; x^3 = \frac{2000}{2} = 1000$$

$$x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$A_L'' = 2 + \frac{4000}{x^3} \Rightarrow A_L''(10) = 2 + \frac{4000}{10^3} \rangle 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

el valor de la "y" del mínimo se calcula con la expresión del volumen.

$$y = \frac{500}{10^2} = \frac{500}{100} = 5$$

Septiembre 1999. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión

$$C(x) = 3x^2 - 27x + 108$$

a) ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio (hacer dibujo)?
b) Justifíquese que la función de coste medio, M (x), no tiene puntos de inflexión.

Solución

Se pide el coste medio de un producto y para ello se da el coste en función de la producción C(x). La función que da el coste medio es:

$$M(x) = \frac{\text{Coste total de producción}}{\text{Unidades proucidas}} = \frac{3x^2 - 27x + 108}{x}.$$

Simplificando está expresión:

$$M(x) = 3x - 27 + \frac{108}{x}.$$

Para resolver los apartados a y b hacen falta las dos primeras derivadas.

$$M'(x) = 3 - \frac{108}{x^2}, \ M''(x) = \frac{324}{x^3}$$

a) Se pide Calcular el mínimo de la función M(x).

$$M'(x) = 3 - \frac{108}{x^2} = 0, \ x = \pm 6.$$

Se sustituye en la 2º derivada para comprobar.

$$M''(6) = \frac{324}{6^3} > 0 \ \Rightarrow \ \text{MÍNIMO}$$

En (6, M(6)) = (6,63) existe un mínimo. Para una producción de 6 unidades se obtiene un coste medio mínimo de 63.

b) Se pide comprobar sí $M''(x) \neq 0 \ \forall x \in \Re$

$M''(x) = \frac{324}{x^3} \neq 0$ no tiene ceros. Condición necesaria para que existan puntos de inflexión.