MATRICES

1. Determinar la matriz transpuesta de cada una de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ -2 & -4 & 2\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5 & 6 & 8\\ 4 & -3 & 0 & 1 & 6\\ -3 & -5 & 4 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

2. Efectúa la siguiente operación con matrices y calcula A

$$2\cdot A-3\cdot\begin{pmatrix}1 & -5 & -6\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}-\left[5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-6 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]$$

3. Sean $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 8\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ determinar:

a) $A^t+6B+3C$
b) $(A-C)^t+7B-6B^t$
c) $7A-2C+3(6A^t-2B)$
d) $A-A^t-3(B+C)$

4. Dadas las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$

Calcular:

a) $A\cdot B\cdot C$
b) $A\cdot(B+C)$
c) $B\cdot C\cdot A^t$
d) $(7B-6C)\cdot A^t$

5. Sea $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$, calcular si es posible los productos A·B y B·A

6. Calcular A·B y B·A siendo A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$$

7.

a) Sean A una matriz de dimensión 5×4, B una matriz de dimensión m×n y C de dimensión 3×7. Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC, ¿ Cual es la dimensión de la matriz B? ¿Y la de la matriz ABC?
b) Si A es una matriz, ¿existe siempre el producto $A^t\,A$?. Razona la respuesta.

8. Se considera la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Calcular $\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^2\cdot A$.

www.clasesdeapoyo.com

www.clasesdeapoyo.com

9.

a) Calcular A^2, A^3, A^4 y A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Calcular las potencias enésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y A^n.

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{100}.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y A^{428}

13. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, verificar que se cumple $A^2 - 3A + 2I = 0$. Calcular A^8.

14. Calcular una matriz de orden dos simétrica y otra antisimétrica tal que su suma sea $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Demostrar que cualquier matriz cuadrada se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

15. Resolver las siguiente ecuaciones matriciales:

a) $(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = a \cdot (1 \quad -1)$

b) $(x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = (7 \quad 0)$

16. Calcular las matrices A y B:

a) $\begin{cases} 3 \cdot A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot A^t - 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 16 \\ 9 & -14 \end{pmatrix} \\ A + 3 \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -13 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

17. Calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ por tres métodos diferentes.

18. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

19. Dada la matriz 2x2 con elementos $a_{11}=1$, $a_{12}=-1$ $a_{21}=2$, $a_{22}=2$ calcule su matriz inversa y compruebe el resultado.

20. Sea $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$ Hallar el valor o valores de a para los que la matriz A no tiene inversa. Hallar A^{-1} para a = 2.

21. Calcular A^2-3A-I siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta el resultado anterior calcular A^{-1} y A^4.

22. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Hallar A^{-1} y A^n.

23. Hallar utilizando el método de Gauss, el rango de la matriz $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

24.

a) Sean X, B y C matrices de orden 3x3, con el determinante de B distinto de 0. Para despejar X en la ecuación B·X=C se procede del modo siguiente:

$$B\cdot X=C \Rightarrow (B\cdot X)\cdot B^{-1}=CB^{-1} \Rightarrow B\cdot(X\cdot B^{-1})=C\cdot B^{-1} \Rightarrow B\cdot(B^{-1}\cdot X)=CB^{-1} \Rightarrow (B\cdot B^{-1})\cdot X=C\cdot B^{-1} \Rightarrow I\cdot X=C\cdot B^{-1}$$
$$X=C\cdot B^{-1}$$

(Donde I es la matriz unidad de orden 3x3). Si el racionamiento anterior es incorrecto, señalar los fallos y reconstruirlo correctamente paso a paso, indicando en cada paso cuál es la propiedad aplicada.

b) Resolver la ecuación B·X=C, siendo $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

25. Por que matriz hay que premultiplicar a la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ para obtener la $B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 11 & 5\end{pmatrix}$. ¿Seria la misma si invertimos el orden?.

www.clasesdeapoyo.com

26. Calcular M para que se cumpla A · M = 2 · I, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

27. Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$:

a) Hallar X sí A·X = B.
b) Hallar X sí X·B = A.

28. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

29. De una matriz se sabe que es triangular inferior y simétrica, ¿de que tipo de matriz se trata?.

30. Obtener una matriz simétrica y otra antisimétrica tal que su suma sea $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

31. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, obtener la matriz B tal que A·B = B·A.

32. Determinar los valores de a y b de forma que la matriz $\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$

33. Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$

34. Se dice que dos matrices conmutan si AB = BA. Encontrar todas las matrices que conmutan con $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

35. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}t & 1 & 2t\\ t & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, hallar los valores de t para los que existe A^{-1}. Calcular, si es posible A^{-1} para $t = -1$.

36. Hallar las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a-1\end{pmatrix}$ que verifican $A^2 = A$

37. Hallar las matrices $A=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}$ cuyo determinante vale 25 y tales que B·A–A·B = 0 siendo $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

www.clasesdeapoyo.com

38. Sea M la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3×3. Calcula la matriz J tal que M=J+I. Calcula también las matrices J^2, J^3, y $J^{1.994}$.

39. Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de AB.
b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esa matriz. Justifica la respuesta.

40. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener: C + A·B.

b) Calcular: $C^{-1} + (AB)^{-1}$; $(C + AB)^{-1}$.

41. (Puntuación máxima: 3 Puntos) Sean las matrices A y B, definidas como: A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X tal que verifique X·B = A + B

42. (Puntuación máxima: 2 Puntos)

Hallar x, ,y, z para que se verifique $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

43. (Puntuación máxima: 2 Puntos) 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcular las matrices C y D, sabiendo que AC = BD = I, siendo I la matriz identidad de orden dos.

b) Discutid y resolved el sistema dado por: $\left(C^{-1} - D^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ siendo C^{-1} y D^{-1} las matrices inversas de las matrices C y D indicadas en el aparato anterior.

www.clasesdeapoyo.com