Modelo 2014. Problema 5A.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90% para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución.

a. x ≡ contenido en alquitrán de un cigarro. Variable continua con distribución normal

Para estimar su media poblacional (μ) se toma una muestra de 20 cigarrillos, las medias de la muestran, también siguen una distribución normal: $\bar{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{20}}\right)$

Conocida una media muestral $(\bar{x} = 22\text{ mg})$, el intervalo de confianza para la media poblacional viene expresado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde, $z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, siendo 1 – α = Nivel de confianza = 90% = 0,90 ⇒ α = 0,1

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9500) = 1{,}645$$

Sustituyendo en el intervalo de confianza:

$$\left(22 - 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}}, 22 + 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}}\right) = (20{,}53;\ 23{,}47)$$

Se puede estimar con una probabilidad del 90% que la media de alquitrán de los cigarrillos va ha estar comprendida entre 20,53 y 23,47 mg.

b. El tamaño muestral se obtiene del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{máx} > z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{4}{0{,}5}\right)^2 = 173{,}1$$

$$n \geq 174$$

Modelo 2014. Problema 5B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El nº de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

40 28 41 102 95 33 108 20 64

Determínese un intervalo de confianza al 95% para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90%, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

Solución.

a. Se pide estimar la media poblacional de una variable (x ≡ Km que recorre en un día un conductor de una empresa de transportes) continua con distribución normal, conocida una muestra de la variable de 9 elementos.

Las medias de la muestras de la variable de tamaño 9, tambien siguen una distribución normal

$$\bar{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{9}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media poblacional a partir de una media muestral es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde: $\bar{x} = \dfrac{40+28+41+102+95+33+108+20+64}{9} = 59\ \text{Km}$

σ = 30 Km

$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, siendo 1 – α = Nivel de confianza = 95% = 0,95 ⇒ α = 0,05

$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$

Sustituyendo en el intervalo:

$$\left(59 - 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{9}}, 59 + 1{,}96 \cdot \frac{30}{\sqrt{9}}\right) = (39{,}4;\ 78{,}6)$$

Se puede concluir que con una probabilidad del 95%, la media de Km recorridos por los conductores de esa empresa al día va a estar comprendida entre 39,4 y 78,6.

b. El error de estimación viene expresado por:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nivel de confianza = 90% ⇒ 1 – α = 0,90 ⇒ α = 0,1

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9500) = 1{,}645$$

$$\varepsilon_{\text{máx}} > 1{,}645 \cdot \frac{50}{\sqrt{4}} = 41{,}1\ \text{Km}$$

Septiembre 2013. Ejercicio 5A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90%.

Solución.

a. x ≡ Tiempo de renovación de un teléfono móvil, variable continua con distribución Normal

$x : N(\mu, \sigma)$ $\quad\quad \sigma = 0{,}4$ años

Para muestras de tamaño 400 elementos, las medias muéstrales también siguen una distribución Normal con la misma media y diferente desviación.

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media de la variable (μ)n a partir de la media de una muestra $(\bar{x})$, viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico asociado al nivel de confianza requerido.

$$\left.\begin{array}{r} z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \text{Nivel de confianza} = 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \end{array}\right\} : z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Conocido el valor crítico se sustituyen los datos en el intervalo.

$$\left(1'75-1{,}96\cdot\frac{0'4}{\sqrt{400}},\,1'75+1{,}96\cdot\frac{0'4}{\sqrt{400}}\right)=(1'71,\,1'79)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que el tiempo medio de renovación del móvil en la población va a estar comprendido entre 1,71 y 1,79 años.

b. El tamaño de la muestra se puede obtener a partir del máximo error admitido.

$$\varepsilon_{máx}>z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ n>\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\\ \text{Nivel de confianza}=1-\alpha=0{,}90\Rightarrow\alpha=0{,}10\end{array}\right\}:z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}10}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9500)=1{,}645$$

$$n>\left(1{,}645\cdot\frac{0{,}4}{0{,}02}\right)^2=1082{,}4\ \Rightarrow\ n\geq 1083\,\text{datos}$$

Septiembre 2013. Ejercicio 5B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.

b) Determínese un intervalo de confianza del 99% para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Solución.

a. La variable x sigue una distribución del tipo $N(\mu,\sigma)$, para muestras de tamaño 64 elementos, las medias muestrales también siguen una distribución Normal, $\bar{x}:N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}\right)$. Se pide:

$$p(|\bar{x}-\mu|\geq 22)=p\left(\overline{|\bar{x}-\mu|<22}\right)=1-p(|\bar{x}-\mu|<22)$$

$$p(|\bar{x}-\mu|<22)=p(-22<\bar{x}-\mu<22)=p(\mu-22<\bar{x}<\mu+22)=$$

$$\underset{N_{\bar{x}}\left(\mu,\frac{210}{8}\right)}{\overset{\text{Tipificando}}{=}}\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=\mu-22\ \ \rightarrow\ \ z=\dfrac{\mu-22-\mu}{210/8}=\dfrac{-22}{210/8}=-0{,}84\\ \bar{x}=\mu-22\ \ \rightarrow\ \ z=\dfrac{\mu+22-\mu}{210/8}=\dfrac{22}{210/8}=0{,}84\end{array}\right\}=p(-8{,}84<z<0{,}84)=$$

$$=p(z<0{,}84)-p(z\leq-0{,}84)\overset{\text{Simetria}}{=}p(z<0{,}84)-p(z\geq 0{,}84)\overset{\text{Complement}}{=}p(z<0{,}84)-(1-p(z<0{,}84))=$$
$$=2p(z<0{,}84)-1=2\cdot 0{,}7995-1=0{,}599$$

$$p(|\bar{x}-\mu|<22)=0{,}599\ \Rightarrow\ p(|\bar{x}-\mu|\geq 22)=p\left(\overline{|\bar{x}-\mu|<22}\right)=1-p(|\bar{x}-\mu|<22)=1-0{,}599=0{,}401$$
$$p(|\bar{x}-\mu|\geq 22)=40{,}1\%$$

b. El intervalo de probabilidad para la media poblacional conocida una media muestral esta expresado por:

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\,\bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor de $Z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza.

$$Z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\left\{\begin{array}{c}\text{N.C.}=1-\alpha=0{,}99\\ \alpha=0.01\end{array}\right\}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}01}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9950)=2{,}58$$

Sustituyendo los datos en el intervalo:

$$\left(1532 - 2'58 \cdot \frac{210}{\sqrt{64}}, 1532 + 2'58 \cdot \frac{210}{\sqrt{64}}\right) = (1464, 1600)$$

Con un nivel del confianza del 99% se puede afirmar que la media poblacional de la variable va a estar comprendida entre 1464 y 1600.

Junio 2013. Problema 5A.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,37 Mb?
b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

Solución.
a. x ≡ Mb descargados mensualmente. Variable continua que sigue una distribución Normal

$$x : N(\mu, \sigma) \qquad \mu = 3{,}5\text{ Mb} \qquad \sigma = 1{,}4\text{ Mb}$$

Para muestras de tamaño n = 49 elementos, las medias muestrales también siguen una distribución Normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \overline{x} : N\left(3'5, \frac{1{,}4}{\sqrt{49}}\right) = N_{\overline{x}}(3'5, 0'2)$$

Se pide calcular:

$$p(\overline{x} < 3{,}37) \underset{N_{\overline{x}}(3'5,\,0'2)}{=} \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = 3'37 \\ z = \dfrac{3'37 - 3'5}{0{,}2} = -0{,}65 \end{array} \right\} = p(z < -0'65) \overset{\text{SIMETRIA}}{=} p(z > 0{,}65) = p\left(\overline{z \le 0'65}\right) =$$

$$= 1 - p(z \le 0'65) = 1 - \varphi(0{,}65) = 1 - 0'7422 = 0{,}2578$$

$$p(\overline{x} < 3{,}37) = 25{,}78\%$$

b. Intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media de una muestra.

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor de $Z_{\alpha/2}$ se obtiene a partir del nivel de confianza.
Nivel de confianza del 95% ⇒ 1 – α = 0,95: α = 0,05

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

$$\left(3'42 - 1'96 \cdot \frac{1{,}4}{\sqrt{49}}, 3'42 + 1'96 \cdot \frac{1{,}4}{\sqrt{49}}\right) = (3'03, 3'81)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que la media de descargas mensuales va a estar comprendida entre 3’03 y 3’81 Mb.

Junio 2013. Problema 5B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95%, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100h?
b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90% para μ.

Solución.

a. El tamaño muestral se obtiene a partir del máximo error admitido.

$$\varepsilon > Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad n > \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\begin{array}{c}\text{Nivel de confianza}: 1-\alpha = 0{,}95\\ \alpha = 0{,}05\end{array}\right\} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

$$n > \left(1{,}96\cdot\frac{1940}{100}\right)^2 = 1445{,}8 \qquad n \geq 1446$$

b. Nivel de confianza del 90%: $1-\alpha = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}1$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9500) = 1{,}645$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(12415 - 1{,}645\cdot\frac{1940}{\sqrt{225}}, 12415 + 1{,}645\cdot\frac{1940}{\sqrt{225}}\right) = (12202, 12628)$$

Con una confianza del 90% se puede estimar que la duración en horas de este tipo de bombillas va a estar comprendido entre 12202 y 12628 h.

Modelo 2013. Problema 5A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144:

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor de 1 gramo.

b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

Solución.

a. $x \equiv$ peso en gramos de una caja de cereales. Variable continua con distribución Normal.

$$x : N(\mu, \sigma)$$

Las medias de muestras de 144 datos de la variable x, también siguen una distribución Normal

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{144}}\right)$$

Se pide calcular $p(|\overline{x}-\mu| < 1)$

Teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto:

$$|x-\mu| < 1 \Leftrightarrow 1-\mu < x < 1+\mu$$

$$p(|\overline{x}-\mu| < 1) = p(\mu - 1 < \overline{x} < \mu + 1)$$

Tipificando la variable con los parámetros de la distribución de las media muestrales:

$$p(\mu-1 < \overline{x} < \mu+1) \underset{N_{\overline{x}}\left(\mu,\frac{5}{12}\right)}{=} \left\{\begin{array}{ll}\overline{x} = \mu - 1 & z = \dfrac{\mu-1-\mu}{5/12} = \dfrac{-1}{5/12} = -2{,}4\\ \overline{x} = \mu+1 & z = \dfrac{\mu+1-\mu}{5/12} = \dfrac{1}{5/12} = 2{,}4\end{array}\right\} = p(-2{,}4 < z < 2{,}4) =$$

$$= p(z < 2{,}4) - p(z \leq -2{,}4) = p(z<2{,}4) - p(z \geq 2{,}4) = p(z < 2{,}4) - p\left(\overline{z < 2{,}4}\right) = p(z<2{,}4) - (1 - p(z < 2{,}4)) =$$

$$= 2p(z < 2{,}40) - 1 = 2\phi^{-1}(2{,}40) - 1 = 2\cdot 0{,}9918 - 1 = 0{,}9836$$

$$p(|\overline{x}-\mu| < 1) = 98{,}36\%$$

b. Intervalo de confianza a partir de una media muestral:

$$\left(\overline{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- $\overline{x}=499{,}5$
- Nivel de confianza = 90% $\Rightarrow 1-\alpha=0{,}9$; $\alpha=0{,}1$; $Z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9500)=1{,}65$
- $\sigma=5$
- n = 144

$$\left(499{,}5-1{,}65\cdot\frac{5}{\sqrt{144}},499{,}5+1{,}65\cdot\frac{5}{\sqrt{144}}\right)=(498'8,500'2)$$

Con un nivel de confianza del 90%, se puede asegurar que el peso medio de los paquetes de cereales va a estar comprendido entre 498,8 g y 500,2 g,

Modelo 2013. Problema 5B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
La altura de los árboles de una determinada comarca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza 25 cm. Se toma una muestra aleatoria simple y, para un nivel de confianza del 95%, se construye un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de 2,45 cm.

a) Determínese el tamaño de la muestra seleccionada.
b) Determínese el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la altura media para la muestra seleccionada fue de 170 cm.

Solución.
a. El tamaño muestral, se puede obtener a partir del error máximo admitido. El error máximo admitido es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\varepsilon_{max}=\frac{\text{amplitud}}{2}=\frac{2{,}45}{2}=1{,}225\,\text{cm}$$

El error máximo viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{max}>Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando el número de datos de la muestra:

$$n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

- Nivel de confianza = 95% $\Rightarrow 1-\alpha=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$;
  $Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$
- $\sigma=\sqrt{\text{Varianza}}=\sqrt{25}=5$

$$n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{5}{1{,}225}\right)^2=64\quad\Rightarrow n\geq 65$$

b. Intervalo de confianza conocida la media muestral es: $(170-\varepsilon_{máx},170+\varepsilon_{máx})$

$$\text{Intervalo de confianza }=(170-1'225,170+1'225)=(168'775,171'225)$$

Septiembre 2012. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

(a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ.

(b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución.

a. x ≡ Duración en Km de los neumáticos de una cierta marca.

$$x : N(\mu, \sigma)\ ;\ \sigma = 3000 \text{ Km.}$$

Para muestras de tamaño 100, las medias muestrales también siguen una distribución normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{3000}{\sqrt{100}}\right)$$

Para una muestra de este tamaño, se ha obtenido una media muestral de $\overline{x} = 48000$

A partir de la media de la muestra, el intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Nivel de confianza = 1 – α = 0,90 ⇒ α = 0,10

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0,1}{2}\right) = \phi^{-1}(0,95) = 1,65$$

Sustituyendo en la expresión del intervalo:

$$\left(48000 - 1,65\cdot\frac{3000}{\sqrt{100}}, 48000 + 1,65\cdot\frac{3000}{\sqrt{100}}\right) = (47505, 48495)$$

Con un nivel de confianza de 90% se puede asegurar que la media muestras de 100 neumáticos de esta marca va a estar comprendida entre 47505 y 48495 Km.

b. El tamaño muestral se puede obtener del error máximo admitido.

$$\varepsilon > Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n > \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Nivel de confianza = 1 – α = 0,95 ⇒ α = 0,05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0,9750) = 1,96$$

Sustituyendo:

$$n > \left(1,96\cdot\frac{3000}{1000}\right)^2 = 34,6 \ \Rightarrow n \geq 35 \text{ elementos}$$

Septiembre 2012. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

(a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

(b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución.

a. x ≡ Tiempo de espera. Variable continua con distribución normal $(x : N(\mu, \sigma))$. Si se toman muestras de 121 elementos y se calculan sus medias, las medias muestrales también siguen una distribución normal $\left(\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{121}}\right)\right)$.

Se pide calcular: $p\left(\left|\vec{x}-\mu\right|>0{,}5\right)$

$$p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|>0{,}5\right)=p\left(\overline{\left|\overline{x}-\mu\right|\le 0{,}5}\right)=1-p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|\le 0{,}5\right)$$

$$\left|\overline{x}-\mu\right|\le 0{,}5 \Leftrightarrow -05\le \overline{x}-\mu\le 0{,}5$$

$$p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|>0{,}5\right)=1-p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|\le 0{,}5\right)=1-p\left(-0{,}5\le \overline{x}-\mu\le 0{,}5\right)=1-p\left(\mu-0{,}5\le \overline{x}\le \mu+0{,}5\right)$$

Tipificando la variable con los parámetros de la distribución de las medias muestrales $\left(\overline{x}:N\left(\mu,\frac{3}{11}\right)\right)$

$$\overline{x}\to z=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{x}-\mu}{3/\sqrt{121}}=\frac{\overline{x}-\mu}{3/11}:\begin{cases}\overline{x}=\mu-0{,}5\to z=\dfrac{\mu-0{,}5-\mu}{3/11}=-1{,}83\\ \overline{x}=\mu+0{,}5\to z=\dfrac{\mu+0{,}5-\mu}{3/11}=1{,}83\end{cases}$$

$$p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|>0{,}5\right)=1-p\left(\mu-0{,}5\le \overline{x}\le \mu+0{,}5\right)=1-p\left(-1{,}83\le z\le 1{,}83\right)=1-\left(p(z\le 1{,}83)-p(z<-1{,}83)\right)=$$

$$=1-\left(p(z\le 1{,}83)-p(z>1{,}83)\right)=1-\left(p(z\le 1{,}83)-\left(1-p(z\le 1{,}83)\right)\right)=1-\left(p(z\le 1{,}83)+p(z\le 1{,}83)-1\right)=$$

$$=1-\left(2p(z\le 1{,}83)-1\right)=1-2p(z\le 1{,}83)+1=2-2p(z\le 1{,}83)=2-2\phi(1{,}83)=2-2\cdot 0{,}9664$$

$$p\left(\left|\overline{x}-\mu\right|>0{,}5\right)=0{,}0672=6{,}72\%$$

b. Intervalo de confianza para las medias maestrales de tamaño n;

$$\left(\overline{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- $\overline{x}=7$
- $Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\begin{Bmatrix}\text{Nivel de confianza}=0{,}95=1-\alpha\\ \alpha=0{,}05\end{Bmatrix}=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$
- $\sigma=3$
- $n=121$

$$\left(7-1{,}95\cdot\frac{3}{\sqrt{121}},7+1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{121}}\right)=(6'47,7{,}53)$$

Con una confianza del 95% se puede asegurar que el tiempo medio de espera para muestras de 121 elementos va a estar comprendido entre 6’47 y 7,53 minutos

Junio 2012. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el precio en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día de curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

26 27,5 31 28 25,5 30,5 32 31,5

(a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

(b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97%.

Solución.

$x\equiv$ Peso de los alumnos, variable continua aleatoria con distribución Normal

$$x:N(\mu,\sigma)\ ;\quad \sigma=2{,}8\text{ kg}$$

Las medias muestrales de la variable de tamaño 8 también siguen una distribución normal.

Para n = 8: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{232}{8} = 29 \text{ kg}$

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{2,8}{\sqrt{8}}\right)$$

a. Nivel de confianza del 90%: $1-\alpha = 0,9$; $\alpha = 0,1$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0,1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0,9500) = 1,65$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(29 - 1,65\frac{2,8}{\sqrt{8}}, 29 + 1,65\frac{2,8}{\sqrt{8}}\right) = (27'4, 30'6)$$

Con una confianza del 90% se puede estimar que el peso medio de los alumnos el primer día de clase va a estar comprendido entre 27,4 kg y 30,6 kg.

b. $\varepsilon_{má} = 0,9$; Nivel de confianza = 97%; 1 – α = 0,97; α = 0,03

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0,3}{2}\right) = \varphi^{-1}(0,9850) = 2,17$$

$$\varepsilon_{má} \geq Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad n \geq \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon_{má}}\right)^2 = \left(2.17 \cdot \frac{2,8}{0,9}\right)^2 = 45,57$$

$$n \geq 46 \text{ elementos}$$

Junio 2012. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

(a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6 ; 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

(b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

Solución.

a. Los intervalos de confianza son intervalos de probabilidad, y estos son intervalos centrados en el valor de la media.

$$\bar{x} = \frac{251,6 + 271,2}{2} = 261,4 \text{ €}$$

Conocida la media se puede calcular el error máximo admitido, y del error el tamaño muestral

$$\varepsilon_{máx} = |\bar{x} - 251,6| = |261,4 - 251,6| = 9,8$$

$$\varepsilon_{max} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad n = \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

Nivel de confianza del 95%: $1-\alpha = 0,95$; $\alpha = 0,05$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0,05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0,9575) = 1,96$$

$$n = \left(1{,}96 \frac{45}{9{,}8}\right)^2 = 81$$

b. $\varepsilon_{max} = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Nivel de confianza del 90%: $1-\alpha = 0{,}9\,;\ \alpha = 0{,}1$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9500) = 1{,}65$$

$$\varepsilon_{max} = 1{,}65 \frac{45}{\sqrt{64}} = 9{,}3\ €$$

Modelo 2012. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95%.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la concentración media de CO_2 en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a 350 ppm.

Solución.

a. Se pide calcular el tamaño muestral conocido el error máximo admitido (2 ppm), la desviación típica de la variable (20 ppm) y el nivel de confianza exigido (95%).

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\quad n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

El valor crítico de Z $\left(Z_{\alpha/2}\right)$ se calcula a partir del nivel de confianza (1–α)

$$\left.\begin{array}{r} Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1-\alpha = 0{,}95 : \alpha = 0{,}05 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo en la expresión inicial se calcula el número de datos de la muestra.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{20}{2}\right)^2 = 384{,}16 \Rightarrow n \geq 385$$

b. Intervalo de confianza para la media poblacional conocida la media de una muestra de 121 observaciones.

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) : \left\{\begin{array}{l} \overline{x}_o = 350 \\ Z_{\alpha/2} = 1{,}96 \\ \sigma = 20 \\ n = 121 \end{array}\right\} : \left(350 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{121}}, 350 + 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{121}}\right) = (346{,}4\,;\ 353{,}6)$$

Con un nivel de confianza de 95% se puede estimar que la media de la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región va a estar comprendida entre 346,4 y 353,6 ppm.

Modelo 2012. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima 2 puntos)

Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable con distribución normal de media μ = 100V y desviación típica σ 10V. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de este tipo, tomadas al azar y con independencia?

Solución.

Se pide el tipo de distribución que siguen las medias de muestras de cuatro observaciones de una variable que sigue una distribución normal de parámetros conocidos.

$$x : N(100\,V, 10\,V) \xrightarrow{n=4} \bar{x} : N\left(100\,V, \frac{10}{\sqrt{4}}\,V\right) = N(100\,V, 5\,V)$$

Septiembre 2011. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.
b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución.

a. $x \equiv$ Presión diastólica, variable continúa con distribución Normal.

$$x : N(98, 15)$$

Las medias de muestras aleatorias de nueve elementos de esta variable $(\bar{x})$, también siguen una distribución Normal.

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(98, \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = N_{\bar{x}}(98, 5)$$

Para la variable media muestral se pide:

$$p(\bar{x} > 100) \underset{N_{\bar{x}}(98,3)}{=} \left\{ \begin{matrix} \bar{x} = 100 \\ z = \dfrac{100-98}{5} = 0{,}67 \end{matrix} \right\} = p(z > 0{,}40) \underset{\text{Complementario}}{=} p(z \le 0{,}40) = 1 - p(z \le 0{,}40) = 1 - \varphi(0{,}40) \underset{N(0,1)}{=}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} F : 0{,}4 \\ C : 0{,}00 \end{matrix} \right\} = 1 - 0'6554 = 0{,}3446$$

$$p(\bar{x} > 100) = 34{,}46\%$$

b. Se pide calcular una probabilidad condicionada.

$$p\left(\bar{x} < 104 \big/ \bar{x} > 100\right) = \frac{p(100 < \bar{x} < 104)}{p(\bar{x} > 100)}$$

$$p(100 < \bar{x} < 104) \underset{N_{\bar{x}}(98,5)}{=} \left\{ \begin{matrix} x = 100 & \rightarrow & z = 0{,}40 \\ x = 104 & \rightarrow & x = \dfrac{104-98}{5} = 1{,}20 \end{matrix} \right\} = p(0{,}40 < 1{,}20) = \varphi(1{,}20) - \varphi(0{,}40) \underset{N(0,1)}{=}$$

$$= 0{,}8849 - 0{,}6554 = 0{,}2292$$

Del apartado "a", $p(\bar{x} > 100) = 0{,}3446$, sustituyendo:

$$p\left(\bar{x} < 104 \big/ \bar{x} > 100\right) = \frac{p(100 < \bar{x} < 104)}{p(\bar{x} > 100)} = \frac{0{,}2292}{0{,}3446} = 0{,}6551$$

$$p\left(\bar{x} < 104 \big/ \bar{x} > 100\right) = 65{,}51\%$$

Septiembre 2011. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de tests y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 tests, se ha obtenido una media muestral igual a 110 Determínese un intervalo de confianza para e al 95 %.

b) ¿Cuál es el número mínimo de tests que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Solución.

a. $x \equiv$ puntuación obtenida en un test. Variable continua con distribución Normal, que sigue una distribución:

$$x : N(\theta, 10)$$

Para muestras de nueve test, las medias de los resultados también siguen una distribución Normal

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\theta, \frac{10}{\sqrt{9}}\right) = N_{\bar{x}}\left(\theta, \frac{10}{3}\right)$$

Se pide calcular un intervalo de probabilidad para θ a partir de la media de una muestra de 9 test $(\bar{x}_o = 110)$, con un nivel de confianza del 95%.

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico de Z $(Z_{\alpha/2})$ se obtiene del nivel de confianza que se requiere.

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Nivel de confianza = 1 – α = 0,95 ⇒ α = 0,05

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo los datos se obtiene el intervalo que se pide.

$$\left(110 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}},\ 110 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}}\right) = (103'5, 116{,}5)$$

Con un nivel de confianza del 95% se puede estimar que la media del coeficiente de inteligencia persona (θ) va a estar comprendido entre 113,5 y 116,5.

b. El tamaño de la muestra se relaciona con el error máximo admitido por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ :\ n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$n > \left(1{,}96 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 = 96{,}04$$

$$n \geq 97 \text{ test}$$

Junio 2011. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica igual a 15 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95%.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90%?

Solución.

a. El intervalo de confianza para la media poblacional (μ) a partir de una media muestral $(\bar{x}_o)$, viene dado por la siguiente expresión:

$$\left(\bar{x}_o - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico de z que se obtiene del nivel de confianza que se especifica, σ es la desviación típica de la variable, n es el número de elementos de la muestra y $\overline{x}_o$ es la media muestral expresada en minutos (la media y la desviación deben ir expresadas en las mismas unidades).

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} \text{Nivel de confianza}: 1-\alpha = 0{,}95 \\ \alpha = 0{,}05 \end{Bmatrix} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\left(180 - 1{,}96\cdot\frac{15}{\sqrt{400}}, 180 + 1{,}96\cdot\frac{15}{\sqrt{400}}\right) = (178'5\,,\ 181'5)$$

Con un nivel de confianza del 95% se puede estimar que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en dicha zona estará comprendido entre 178'5 y 181,5 minutos.

b. El tamaño muestral esta relacionado con el error máximo por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando el número de elementos:

$$n > \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} \text{Nivel de confianza}: 1-\alpha = 0{,}90 \\ \alpha = 0{,}1 \end{Bmatrix} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645$$

$$n > \left(1{,}645\cdot\frac{15}{3}\right)^2 = 67{,}65 \Rightarrow n \geq 68 \text{ elementos}$$

Junio 2011. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar por una variable aleatorio con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09 euros. Se toma una muestra a1eatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

1,50 ; 1,60 ; 1,10 ; 0,90 ; 1,00 ; 1,60 ; 1,40 ; 0,90 ; 1,30 ; 1,20

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

Solución.
a. El intervalo de confianza para la media poblacional (μ) a partir de una media muestral $(\overline{x}_o)$, viene dado por la siguiente expresión:

$$\left(\overline{x}_o - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico de z que se obtiene del nivel de confianza que se especifica, σ es la desviación típica de la variable, n es el número de elementos de la muestra y $\overline{x}_o$ es la media de la muestra.

$$\overline{x}_o = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1{,}50+1{,}60+1{,}10+0{,}90+1{,}00+1{,}60+1{,}40+0{,}90+1{,}30+1{,}20}{10} = 1{,}25$$

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} \text{Nivel de confianza}: 1-\alpha = 0{,}95 \\ \alpha = 0{,}05 \end{Bmatrix} = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\left(1{,}25-1{,}96\cdot\frac{0{,}09}{\sqrt{10}}, 1{,}25+1{,}96\cdot\frac{0{,}09}{\sqrt{10}}\right)=(1{,}19\ ;\ 1'31)$$

Con un nivel de confianza del 95% se puede estimar que el precio medio (en euros) de un refresco estará comprendido entre 1,19 y 1,31 euros.

b. El tamaño muestral esta relacionado con el error máximo por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando el número de elementos:

$$n > \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\begin{Bmatrix}\text{Nivel de confianza}: 1-\alpha=0{,}99\\ \alpha=0{,}01\end{Bmatrix}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}01}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}995)=2{,}58$$

$$\varepsilon_{\text{máx}}=0{,}1$$

$$n>\left(2{,}58\cdot\frac{0{,}09}{0{,}1}\right)^2=5{,}39\Rightarrow n\geq 6\ \text{elementos}$$

Modelo 2011. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de una población (medido en miligramos por decilitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual que 98%?

Solución.

El tamaño muestral se obtiene a partir del error máximo admitido.

$$\varepsilon > Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad\qquad n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

El valor de $Z_{\alpha/2}$ se obtiene del valor de probabilidad o nivel de confianza $(1-\alpha=0{,}98)$

$$Z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}02}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9900)=2{,}33$$

Sustituyendo se obtiene el tamaño de la muestra.

$$n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2=\left(2{,}33\cdot\frac{35}{20}\right)^2=16{,}6 \qquad n\geq 17\ \text{Elementos}$$

Modelo 2011. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95%.

Solución.

a. $x:\ \bar{x}:N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\bar{x}:N\left(12,\frac{2}{\sqrt{25}}\right)=\bar{x}:N\left(12,\frac{2}{5}\right)$

Intervalo de confianza para la media poblacional a partir de una media muestral:

$$\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde, $z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, siendo 1 – α = Nivel de confianza = 90% = 0,90 ⇒ α = 0,1

$$z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9500)=1{,}645$$

$$\left(12-1{,}645\cdot\frac{2}{5}, 12+1{,}645\cdot\frac{2}{5}\right)=(11'34, 12'66)$$

b. El tamaño muestral se obtiene del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{máx}>z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n>\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, siendo 1 – α = Nivel de confianza = 95% = 0,95 ⇒ α = 0,05

$$z_{\alpha/2}=\varphi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\varphi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$$

$$n>\left(1{,}96\cdot\frac{2}{0{,}1}\right)^2=1536{,}64$$

$$n\geq 1537 \text{ elementos}$$

Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Para medir el coeficiente de inteligencia μ de un individuo, se realizan test cuya calificación X se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de media igual a μ y desviación típica igual a 15. Un cierto individuo realiza 9 test con independencia.

a) Si la calificación media de dichos test es igual a 108, determínese un intervalo de confianza al 95% para su coeficiente de inteligencia μ

b) Si el individuo que ha realizado los 9 test tiene un coeficiente de inteligencia $\mu=110$, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación media muestral mayor que 120?

Solución.

a. Se pide calcular el intervalo de confianza para la media poblacional conocida una media muestral de una variable con distribución normal.

$$x:N(\mu,15)\xrightarrow{n=9}\overline{x}:N\left(\mu,\frac{15}{\sqrt{9}}\right)=N_{\overline{x}}(\mu,5)$$

En una muestra de 9 test, se obtenido una madia: $\overline{x}_o=108$. El intervalo de confianza para la media poblacional (μ) a partir de una media muestral $(\overline{x}_o)$ viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ se obtiene a partir del nivel de confianza (1 – α).

$$1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}05:\ z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$$

Sustituyendo en la expresión de intervalo de confianza:

$$\left(108-1{,}96\cdot\frac{15}{\sqrt{9}}, 108+1{,}96\cdot\frac{15}{\sqrt{9}}\right)=(98{,}2;117{,}8)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que el coeficiente intelectual del individuo va a estar comprendido entre 98,2 y 117,8.

b. Conocida la distribución que sigue la variable x, se pide calcular la probabilidad de que la media de una muestra sea mayor que un determinado valor.

$$x : N(110, 15) \xrightarrow{n=9} \overline{x} : N\left(110, \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = N_{\overline{x}}(110, 5)$$

$$p(\overline{x} > 120) \overset{N(110,5)}{=} \left\{ \begin{array}{c} \overline{x} = 120 \\ z = \dfrac{120-110}{5} = 2{,}00 \end{array} \right\} = p(z > 2{,}00) = p(\overline{z \le 2{,}00}) = 1 - p(z \le 2{,}00) = 1 - \phi(2{,}00) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

La probabilidad de que la media de nueve test realizados por el individuo sea mayor de 120 es del 2,28%

Septiembre 2010. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El saldo en cuenta a fin de año de los clientes de una cierta entidad bancaria se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 400 euros. Con el fin de estimar la media del saldo en cuenta a fin de año para los clientes de dicha entidad, se elige una muestra aleatoria simple de 100 clientes.

a) ¿Cuál es el nivel máximo de confianza de la estimación si se sabe que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional es menor o igual que 66 euros?

b) Calcúlese el tamaño mínimo necesario de la muestra que ha de observarse para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 40 euros, con un nivel de confianza del 95%.

Solución.

a. El problema se puede hacer de dos formas diferentes: por probabilidad o por error.

Por probabilidad. El nivel de confianza de la estimación es:

$$N.C. = p(|\overline{x} - \mu| \le 66) = p(-66 \le \overline{x} - \mu \le 66) = p(\mu - 66 \le \overline{x} \le \mu + 66)$$

Las medias de las muestras de tamaño 100 de la variable x siguen una distribución normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 40)$$

Para calcular la probabilidad, se tipifica la variable con los parámetros de la distribución.

$$p(\mu - 66 \le \overline{x} \le \mu + 66) \overset{N_{\overline{x}}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = \mu - 66 \to z = \dfrac{\mu - 66 - \mu}{40} = -1{,}65 \\ \overline{x} = \mu + 66 \to z = \dfrac{\mu + 66 - \mu}{40} = +1{,}65 \end{array} \right\} = p(-1{,}65 \le z \le 1{,}65) =$$

$$= p(z \le 1{,}65) - p(z < -1{,}65) = p(z \le 1{,}65) - p(z > 1{,}65) = p(z \le 1{,}65) - p(\overline{z \le 1{,}65}) =$$

$$= p(z \le 1{,}65) - (1 - p(z \le 1{,}65)) = 2 \cdot p(z \le 1{,}65) - 1 = 2 \cdot \phi(1{,}65) - 1 = 2 \cdot 0{,}9505 - 1 = 0{,}901$$

Nivel confianza = 90,1%

Por error máximo admitido. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{máx} = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De esta expresión se conoce todo menos el valor crítico de z $(Z_{\alpha/2})$.

$$Z_{\alpha/2}=\frac{\varepsilon_{máx}\cdot\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{66\cdot\sqrt{100}}{400}=1{,}65$$

Teniendo en cuenta que $Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\phi\left(Z_{\alpha/2}\right):\quad \alpha=2\cdot\left(1-\phi\left(Z_{\alpha/2}\right)\right)=2\cdot\left(1-\phi(1{,}65)\right)=2\cdot(1-0{,}9505)=0{,}099$$

Conocido el nivel de significación (α), se calcula el nivel de confianza.

$$\text{N.C.}=1-\alpha=1-0{,}099=0{,}901$$

$$\text{N.C.}=90{,}1\%$$

b. El tamaño muestral se calcula a partir de error máximo admitido

$$\varepsilon_{máx}>Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n>\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\left\{\begin{array}{c}\text{N.C.}=95\%\\ 1-\alpha=0{,}95\\ \alpha=0{,}05\end{array}\right\}=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$$

$$n>\left(1{,}96\cdot\frac{400}{66}\right)^2=141{,}1$$

$$n\geq 142 \text{ elementos}$$

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución.

a. Se pide calcular la probabilidad de que las medias de las muestras de tamaño 36 de una variable continua con distribución Normal, estén en un intervalo determinado mediante un valor absoluto.

$$p\left(\left|\bar{x}-\mu\right|\geq 50\right):\quad p\left(-50\geq\bar{x}-\mu\geq 50\right):\quad p\left(\mu-50\geq\bar{x}\geq\mu+50\right)$$

Si la variable continua x sigue una distribución Normal, las medias de la muestras de tamaño 36 también siguen una distribución normal con la misma media y diferente desviación.

$$x:N(\mu,\sigma)\xrightarrow{n=36}\bar{x}:N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\right)$$

Los parámetros de la distribución de las medias maestrales permiten tipificar la variable.

$$\bar{x}=\mu-50\quad z=\frac{\mu-50-\mu}{320/\sqrt{36}}=\frac{-50}{53{,}\widehat{3}}\cong -0{,}94$$

$$\bar{x}=\mu+50\quad z=\frac{\mu-50+\mu}{320/\sqrt{36}}=\frac{50}{53{,}\widehat{3}}\cong 0{,}94$$

Con la variable tipificada la expresión queda:

$$p(\mu - 50 \geq \overline{x} \geq \mu + 50) = p(-0{,}94 \geq z \geq 0{,}94) = p(z \leq -0{,}94) + p(z \geq 0{,}94) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Por simetria} \\ p(z \leq -0{,}94) = p(z \geq 0{,}94) \end{array} \right\} = 2 \cdot p(z \geq 0{,}94) = \{\text{Por complementario}\} = 2 \cdot p\left(\overline{z < 0{,}94}\right) =$$

$$= 2 \cdot (1 - p(z < 0{,}94)) = 2 \cdot (1 - 0{,}8264) = 0{,}3472$$

$$p(|\overline{x} - \mu| \geq 50) = 34{,}72\%$$

Teniendo en cuenta que la N(0, 1) es simétrica:

b. El intervalo de confianza para la media de una variable continua a partir de la media de una muestra de tamaño n de dicha variable es:

$$\left(\overline{x}_o - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

El valor crítico $\left(z_{\alpha/2}\right)$, se obtiene a partir del nivel de confianza (1 – α).

$$\left. \begin{array}{r} z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0{,}95 : \alpha = 0{,}05 \end{array} \right\} : z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo por los valores y operando:

$$\left(4820 - 1{,}96 \cdot \frac{320}{\sqrt{36}}, 4820 + 1{,}96 \cdot \frac{320}{\sqrt{36}} \right) = (4715{,}5 \,;\, 4924{,}5)$$

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Para estudiar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42 ; 176,56) para dicha población.

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución.

a. Por tratarse de un intervalo de probabilidad, y por definición de estos (intervalos centrados en la media), la media muestral es la media aritmética de los extremos del intervalo.

$$\overline{x}_o = \frac{173{,}42 + 176{,}56}{2} = 174{,}99$$

b. El nivel de confianza se puede calcular a partir de error.

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \left\{ \varepsilon = \frac{\text{Amplitud}}{2} = \frac{176{,}56 - 173{,}42}{2} = 1{,}57 \right\} = \frac{1{,}57 \cdot \sqrt{100}}{5} = 3{,}14$$

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \phi\left(z_{\alpha/2}\right) = \phi(3{,}14) = 0{,}9992$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9992 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot (1 - 0{,}9992) = 0{,}0016$$

Nivel de confianza = 1 – α = 1 – 0,0016 = 0,9984

Nivel de confianza = 99,84%

Junio 2010. F.G. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.

b) Calcúlese el tamaño muestra! mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución.

a. $x \equiv$ Tiempo de vida útil (Mh). Variable continua con distribución Normal.

$$x : N(\mu, \sigma)$$

Si se toman muestras de tamaño n, las medias maestrales también siguen una distribución normal cuyos parámetros son:

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media de poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño n viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico de z se obtiene a partir del nivel de confianza (N.C. = 1 − α).

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95 %:

$$\left.\begin{array}{r} 1-\alpha = 0.95 \\ \alpha = 0.05 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

Sustituyendo por los datos del enunciado en el intervalo de confianza:

$$\left(18{,}84 - 1.96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{4}}\ ,\ 18{,}84 + 1.96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{4}}\right) = (18.84\,,\ 19.33)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que el tiempo de vida útil del modelo de televisor va ha estar comprendido entre 17,84 y 19,33 miles de horas.

b. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Expresión que permite despejar el tamaño muestral en función del error máximo admitido.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

El valor crítico $(Z_{\alpha/2})$ coincide con el del apartado anterior.

$$n > \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 24{,}01$$

$$n \geq 25$$

Junio 2010. F.M. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución.

a. $x \equiv$ tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente. x: $N(\mu, \sigma)$

Para estimar el valor medio de la variable (media poblacional μ) se ha tomado una muestra de tamaño 100 obteniendo como valor medio $\overline{x}_o = 6 \text{ min}$.

El intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño 100 viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$Z_{\alpha/2}$ Es el valor crítico que se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0{,}95 = 1 - \alpha \ : \ \ \alpha = 0{,}06$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo los valores en el intervalo:

$$\left(6 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}}, 6 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}}\right) = (5.9,\ 6.1)$$

Con una confianza del 95% se puede estimar que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente va a estar comprendido entre 5,9 y 6,1 min.

b. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Expresión que permite despejar el tamaño muestral en función del error máximo admitido.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

El valor crítico $(Z_{\alpha/2})$ se supone que es el mismo que el del apartado anterior. El error máximo admitido se calcula a partir de la amplitud del intervalo (c).

$$c = 2\varepsilon_{máx} \Rightarrow \varepsilon_{máx} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$n > \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 3{,}84 \ \Rightarrow n \geq 4$$

Junio 2010. F.G. Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que el peso en kilos de los rollos de cable eléctrico producidos por una cierta empresa, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 kg. Una muestra aleatoria simple de 9 rollos ha dado un peso medio de 10,3 kg.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de los rollos de cable que produce dicha empresa.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,2 kg, con probabilidad igual a 0,98?

Solución.

a. x ≡ Peso en kg de un rollo de cable eléctrico con distribución N (μ, σ). Se pide estimar la media poblacional del peso de los rollos (μ) a partir de la media de una muestra simple de 9 rollos.

Si la variable x sigue una distribución normal, las medias de tamaño 9 de esta variable también siguen una distribución:

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{0,5}{\sqrt{9}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $\left(Z_{\alpha/2}\right)$ se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0,90 = 1 - \alpha \ : \ \alpha = 0,10$$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0,10}{2}\right) = \varphi^{-1}(0,9500) = 1,65$$

Sustituyendo los valores en el intervalo:

$$\left(10,3 - 1,65 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{9}}, 10,3 + 1,65 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{9}}\right) = (10,02; 10,57)$$

Con una confianza del 90% se puede estimar que el peso medio de los rollos de cable eléctrico va a estar comprendido entre 10,02 y 10, 57 kg.

b. El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Expresión que permite despejar el tamaño muestral en función del error máximo admitido.

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

El valor crítico $\left(Z_{\alpha/2}\right)$ se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0,98 = 1 - \alpha \ : \ \alpha = 0,02$$

$$Z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0,02}{2}\right) = \varphi^{-1}(0,9900) = 2,33$$

$$n > \left(2,33 \cdot \frac{0,5}{0,2}\right)^2 = 33,93$$

$$n \geq 34$$

Junio 2010. F.G. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el precio de un kilo de patatas en una cierta región se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 10 céntimos de euro. Una muestra aleatoria simple de tamaño 256 proporciona un precio medio del kilo de patatas a 19 céntimos de euro.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para el precio medio de un kilo de patatas en la región.

b) Se desea aumentar el nivel de confianza al 99% sin aumentar el error de la estimación. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse?

Solución.

a. x ≡ precio de un kilo de patatas. Variable continua con distribución Normal.

$$x : N(\mu, \sigma)$$

Si se toman muestras de tamaño n, las medias maestrales también siguen una distribución normal cuyos parámetros son:

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media de poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño n viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico de z se obtiene a partir del nivel de confianza (N.C. = 1 − α).

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95 %:

$$\left.\begin{array}{r} 1-\alpha = 0.95 \\ \alpha = 0.05 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

Sustituyendo por los datos del enunciado en el intervalo de confianza:

$$\left(19 - 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{256}}\ ,\ 19 + 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{256}}\right) = (17.8,\ 20.2)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que el precio medio del kilo de patatas va ha estar comprendido entre 17.8 y 20.2 céntimos de euro.

b. El tamaño muestral se estima a partir del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

El error máximo, se obtiene a partir de la amplitud del intervalo (c).

$$c = 2 \cdot \varepsilon_{máx}\ :\ \varepsilon_{máx} = \frac{c}{2}$$

La amplitud del intervalo es el valor absoluto de la diferencia de sus extremos.

$$\varepsilon_{máx} = \frac{|17.8 - 20.2|}{2} = 1.2$$

El cambio de nivel de confianza, cambia el valor de $Z_{\alpha/2}$.

$$\left.\begin{array}{r} 1-\alpha = 0.99 \\ \alpha = 0.01 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.9950) = 2,58$$

Sustituyendo en la expresión se calcula el mínimo tamaño muestral.

$$n > \left(2.58 \cdot \frac{10}{1.2}\right)^2 = 462.25 \ \Rightarrow\ n \geq 463$$

Modelo 2010. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuantos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?
Solución.
x ≡ Duración de una bombilla. Variable continua con distribución Normal N(μ, σ).

$$x : N(900, 80)$$

Si se hacen lotes de 100 bombillas, la duración media de las bombillas del lote también sigue una distribución Normal.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{Tamaño n}} \overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$x : N(900, 80) \xrightarrow{n=100} \overline{x} : N\left(900, \frac{80}{\sqrt{100}}\right) = N_{\overline{x}}(900, 8)$$

Para calcular el número de lotes cuya vida media de las bombillas es superior a 910 horas, hay que calcular la probabilidad de que un lote tenga una vida media superior a 910 horas y multiplicar la probabilidad de un lote por el número de lotes (1000).

Probabilidad de que un lote tenga una vida media superior a 910 horas:

$$p(\overline{x} > 910) \underset{N_{\overline{x}}(910,8)}{=} \left\{ \begin{matrix} \overline{x} = 910 \\ z = \dfrac{910-900}{8} = 1{,}25 \end{matrix} \right\} p(z > 1{,}25) = p\left(\overline{z \le 1.25}\right) = 1 - p(z \le 1{,}25) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Fila} : 1{,}2 \\ \text{Columna} : 0{,}05 \end{matrix} \right\} = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

$$\text{Nº de Lotes} = 1000 \cdot p(\overline{x} > 910) = 1000 \cdot 0{,}1056 = 105{,}6 \approx 107 \text{ lotes}$$

Modelo 2010. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima 2 puntos)
La temperatura corporal de una especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5ºC y desviación típica de 4,9ºC. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9ºC y 41,1ºC?

Solución.
a. x ≡ Temperatura corporal de una especie de ave. Variable continua con distribución normal N(μ, σ).

$$x : N(40'5, 4'9)$$

Si se toma una muestra de 100 aves, la temperatura corporal media de las aves que forman la muestra también sigue una distribución Normal con igual media y desviación igual a la desviación de la variable dividida por la raíz cuadrada del número de elementos de la muestra.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{Tamaño n}} \overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$x : N(40'5, 4'9) \xrightarrow{n=100} \overline{x} : N\left(40'5, \frac{4{,}9}{\sqrt{100}}\right) = N_{\overline{x}}(40'5, 0'49) : \left\{ \begin{matrix} \mu = 40'5 \\ \sigma = 0'49 \end{matrix} \right.$$

Conocida la desviación típica (σ), se calcula la varianza (σ^2).

$$\sigma^2 = 0'49^2 = 0'2401$$

b. $p(39'9<\overline{x}<41'1) \underset{N_{\overline{x}}(40'5,\,0'49)}{=} \left\{\begin{array}{l} \overline{x}=39'9 \to z=\dfrac{39'9-40.5}{0'49}=-1{,}22 \\ \overline{x}=41'1 \to z=\dfrac{41'1-40.5}{0'49}=+1{,}22 \end{array}\right\} = p(-1'22<z<1'22)=$

$$=p(z<1'22)-p(z\le -1'22)=p(z<1'22)-p(z\ge 1'22)=p(z<1'22)-p(\overline{z<1'22})=$$

$$=p(z<1'22)-(1-p(z<1'22))=2\cdot p(z<1'22)-1=\left\{\begin{array}{c}\text{Fila}:1'2\\ \text{Columna}:0{,}02\end{array}\right\}=$$

$$=2\cdot 0'8888-1=0{,}7776$$

$$p(39'9<\overline{x}<41'1)=77'76\,\%$$

Septiembre 2009. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95%.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 1,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Solución.

a. $x \equiv$ tiempo de una conversación en un teléfono móvil.

$$x : N(\mu, \sigma) \quad \sigma = 1{,}32 \text{ min}$$

El tamaño muestral se calcula a partir del error máximo admitido según la expresión:

$$E_{máx} \ge Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad : \quad n \ge \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2$$

El valor crítico $(Z_{\alpha/2})$ se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0{,}95 = 1-\alpha \;:\; \alpha = 0{,}05$$

$$Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$$

Sustituyendo: $n \ge \left(Z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\dfrac{1{,}32}{0{,}5}\right)^2=26{,}8$

$$n \ge 27$$

b. $x : N(4'36, 1'32) \xrightarrow{n=16} \overline{x} : N\left(4'36, \dfrac{1'32}{\sqrt{16}}\right) = N_{\overline{x}}(4'36, 0'33)$

$$p(4<\overline{x}<5) \underset{N_{\overline{x}}(4'36,\,0'33)}{\overset{\text{Tipificar}}{=}} \left\{\begin{array}{l} \overline{x}=4 \to z=\dfrac{4-4{,}36}{0{,}33}=-1{,}09 \\ \overline{x}=5 \to z=\dfrac{5-4{,}36}{0{,}33}=1{,}94 \end{array}\right\} = p(-1{,}09<z<1{,}94)=$$

$$=p(z<1{,}94)-p(z\le -1{,}09) \underset{\text{Por simetria}}{=} p(z<1{,}94)-p(z\ge 1{,}09) \underset{\text{Por contrario}}{=} p(z<1{,}94)-p(\overline{z<1{,}09})=$$

$$=p(z<1{,}94)-(1-p(z<1{,}09))=\phi(1{,}94)-(1-\phi(1{,}09))=\left\{\begin{array}{l}\phi(1{,}94)=\left\{\begin{array}{l}F:1{,}9\\C:0{,}04\end{array}\right\}=0{,}9738\\ \phi(1{,}94)=\left\{\begin{array}{l}F:1{,}0\\C:0{,}04\end{array}\right\}=0{,}8508\end{array}\right\}=$$

$$=0{,}9738-(1-0{,}8508)=0{,}8246$$

$$p(4<\overline{x}<5)=82{,}46\%$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la estancia (en días) de un paciente en un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal con desviación típica de 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Solución.

a. $x \equiv$ Estancia en días de un paciente en un hospital. Variable aleatoria con distribución Normal.
$x : N(\mu, \sigma) \quad \sigma = 9 \text{ días}$

Para muestra de 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral:
$\bar{x}_o = 8 \text{ días}$

El intervalo de confianza para la media del tiempo de estancia en un hospital a partir de la media de una muestra de tamaño n viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor crítico $\left(Z_{\alpha/2}\right)$ se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{Nivel de confianza} = 0{,}95 = 1 - \alpha \ : \ \alpha = 0{,}05$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Sustituyendo los valores en el intervalo:

$$\left(8 - 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{20}}, 8 - 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{20}}\right) = (4'1, 11'9)$$

Con una confianza del 95 % se puede estimar que el tiempo medio de estancia en un hospital va a estar comprendido entre 4,1 días y 11,9 días.

b. El tamaño muestral se obtiene a partir de error máximo admitido, y este, de la amplitud del intervalo (c).

$$E_{máx} = \frac{c}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$E_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad : \quad n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2$$

El valor crítico $\left(Z_{\alpha/2}\right)$ es el mismo que el del apartado a: $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Sustituyendo: $n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 77{,}8$

$$n \geq 78$$

Junio 2009. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución.

a. Las medias de las muestras de la variable x de tamaño n = 81 también siguen una distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. La cuestión que plantea se puede resolver de varias formas:

i. Comprobando si $p\left(|\bar{x}-\mu|<10\right) \geq 0{,}95$; $N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{55}{\sqrt{81}}\right)$

$$|\bar{x}-\mu|<10 : \pm(\bar{x}-\mu)<10 \begin{cases} +(\bar{x}-\mu)<10 : \bar{x}<\mu+10 \\ -(\bar{x}-\mu)<10 : -\bar{x}+\mu<10 : -\bar{x}<-\mu+10 : \bar{x}<\mu-10 \end{cases} : \mu-10<\bar{x}<\mu+10$$

$$p(\mu-10<\bar{x}<\mu+10) \underset{N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{55}{9}\right)}{=} \begin{Bmatrix} \mu-10 : z = \dfrac{\mu-10-\mu}{55/9} = \dfrac{-10}{55/9} = -1{,}64 \\ \mu+10 : z = \dfrac{\mu+10-\mu}{55/9} = \dfrac{10}{55/9} = 1{,}64 \end{Bmatrix} = p(-1{,}64<z<1.64) =$$

$$= p(z<1{,}64) - p(z \leq -1{,}64) = p(z<1{,}64) - (1-p(z<1{,}64)) = 2p(z<1{,}64) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9495 - 1 = 0{,}899 < 0{,}95$$

No se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%.

ii. Comprobando si el error máximo es menor o igual a 10. El error máximo (ε_{max} = 10) para la estimación de la media poblacional mediante un intervalo a partir de una muestra viene expresado por:

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza $(1 - \alpha)$

$$\left.\begin{matrix} Z_{\alpha/2} = \phi\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 1-\alpha = 0{,}95 \end{matrix}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \phi(0{,}9750) = 1{,}96$$

$$\varepsilon_{máx} = 10 \geq 1{,}96 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}} = 11{,}98 : \text{No se cumple}$$

b. Partiendo de la expresión del error máximo admitido se calcula el tamaño muestral.

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$n \geq \left(1{,}96 \cdot \frac{55}{10}\right)^2 = 116{,}2$$

$$n \geq 117 \text{ elementos}$$

Junio 2009. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día(en litros):

9,1 ; 4,9 ; 7,3 ; 2,8 ; 5,5 ; 6,0 ; 3,7 ; 8,6 ; 4,5 ; 7,6

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98%.

Solución.

a. x ≡ Cantidad de agua recogida en un día. Variable continua que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica conocida $(x : N(\mu, \sigma))$.

La media de una muestra de 10 elementos ha sido:

$$\overline{x} = \frac{9.1 + 4.9 + 7.3 + 2.8 + 5.5 + 6.0 + 3.7 + 8.6 + 4.5 + 7.6}{10} = 6 \text{ L}$$

Las medias de la muestras de 10 elementos de esta variable también siguen una distribución Normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

El intervalo de probabilidad para la media poblacional a partir de la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $Z_{\alpha/2}$, viene determinado por el nivel de confianza.

Nivel de confianza = 1 – α = 0.95 ⇒ α = 0.05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.9750) = 1.96$$

Sustituyendo en el intervalo de probabilidad:

$$\left(6 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 6 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (4.76, 7.24)$$

Con una probabilidad del 95% se puede estimar que la media de la cantidad de agua recogida en una estación meteorológica va a estar comprendida entre 4.76 L y 7.24 L.

b. El tamaño muestral se calcula a partir del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0.98 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi\left(1 - \frac{0.02}{2}\right) = \phi(0.9900) = 2.33$$

$$n \geq \left(2.33 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 21.7 \Rightarrow n \geq 22 \text{ elementos en la muestra}$$

Modelo 2009. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el peso de los niños recién nacidos en una cierta región es una variable aleatoria con distribución normal de media 3,25 kg y desviación típica 0,8 kg. Se elige aleatoriamente una muestra de 64 recién nacidos en esa región. Sea $\overline{x}$ la media muestral de los pesos observados.

a) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de $\overline{x}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,3 kg y 3,5 kg?

Solución.

x ≡ peso de los recién nacidos. Variable continua que sigue una distribución Normal de media 3,25 Kg y desviación típica de 0,8 Kg.

$$x : N(3'25, 0'8)$$

a. Si se toman muestras de tamaño 64, las medias muestrales también siguen una distribución Normal, con igual media y diferente desviación.

$$\bar{x}: N\left(3'25, \frac{0'8}{\sqrt{64}}\right) = N(3'25, 0'1)$$

b. $$p(3'3 < \bar{x} < 3{,}5) \underset{z=\frac{\bar{x}-3'25}{0'1}}{\overset{N(3'25,\,0'1)}{=}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 3'3 \rightarrow z = \dfrac{3'3-3'25}{0'1} = 0'5 \\ \bar{x} = 3'5 \rightarrow z = \dfrac{3'5-3'25}{0'1} = 2'5 \end{array} \right\} : p(0'5 < z < 2{,}5) =$$

$$= \phi(2{,}50) - \phi(0{,}50) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(2{,}50) = \left\{ \begin{array}{l} F: 2{,}5 \\ C: 0{,}00 \end{array} \right\} = 0'9938 \\ \phi(0{,}50) = \left\{ \begin{array}{l} F: 0{,}5 \\ C: 0{,}00 \end{array} \right\} = 0'6915 \end{array} \right\} = 0'9938 - 0'6915 = 0'3023$$

$$p(3'3 < \bar{x} < 3{,}5) = 30{,}23\%$$

Modelo 2009. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se ha anotado el número de horas que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido:

7 ; 5 ; 8 ; 2 ; 4 ; 7 ; 4 ; 1 ; 6 ; 6

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza del 90% para el tiempo medio de reparación.

b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 horas con el mismo nivel de confianza?

Solución.

x ≡ Número de horas necesarias para reparar un televisor. Variable continua que sigue una distribución Normal x: N(μ, σ).

a. Se pide calcular un intervalo de confianza para la media poblacional conocida la media de una muestra de tamaño n = 10. Las medias muestrales de tamaño y una variable con distribución Normal, también siguen una distribución normal cuyos parámetros son $N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

La media muestral se calcula con los datos de la muestra:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+5+8+2+4+7+4+1+6+6}{10} = 5$$

El intervalo de probabilidad conocida una media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_o - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza mediante la ecuación:

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

α, nivel de significación, se calcula del nivel de confianza:

Nivel de confianza = 1 − α ⇒ 0,90 = 1 − α: α = 0,1

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}95) \underset{N(0,1)}{=} 1{,}65$$

Sustituyendo en el intervalo:

$$\left(5-1{,}65\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}, 5+1{,}65\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right)=(4'2, 5'8)$$

Con una probabilidad del 90% se puede estimar que el tiempo medio de reparación de los televisores va a estar comprendido entre 4,2 horas y 5,8 horas.

b. El tamaño muestral se obtiene a partir del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{\text{máx}}\geq z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow n\geq\left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2=\left(1{,}65\cdot\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2=24{,}5$$

$$n\geq 25$$

Septiembre 2008. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a 59,5 puntos. .

a) Determínese un intervalo de confianza al 95% para la calificación media de la clase

b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de *0,5* puntos, con el nivel de confianza del 95%?

Solución.

a. x ≡ calificación matemáticas. Variable continua que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación 1,5.

$$x: N(\mu, \sigma) \quad \sigma = 1{,}5$$

Se pide calcular un intervalo de probabilidad para la media de las calificaciones conocida la suma de las notas de diez alumnos. Para ello se genera la variable media muestral $(\overline{x})$ con muestra de tamaño 10.

$$\overline{x}: N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

Intervalo de probabilidad a partir de una media muestral.

$$\left(\overline{x}_o-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}_o+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$Z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza; Nivel de confianza = 1– α = 0'95 ⇒ α = 0,05

$$Z_{\alpha/2}=\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)=\phi^{-1}(0{,}9750)=1{,}96$$

La media muestral se calcula conocida la suma de las calificaciones de 10 alumnos.

$$\sum_1^{10}x_i=59{,}5\Rightarrow\overline{x}_o=\frac{\sum_1^{10}x_i}{10}=\frac{59{,}5}{10}=5{,}95$$

$$\left(\overline{x}_o-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}_o+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(5{,}95-1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}},\ 5{,}95+1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right)=(5{,}02\ ,\ 6{,}88)$$

Se puede estimar con una probabilidad del 95% que la calificación media de matemáticas de la clase va a estar en el intervalo (5,02 , 6,88).

b. El tamaño muestral se calcula a parir del error máximo admitido.

$$\varepsilon_{\text{máx}}\geq Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow n\geq\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2=\left(1{,}95\cdot\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2=34{,}57$$

$$n\geq 34$$

Septiembre 2008. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

46 ; 38 ; 59 ; 29 ; 34 ; 32 ; 38 ; 21 ; 44 ; 34

a) Determínese un intervalo de confianza al 95% para la vida media de dicha especie de tortugas.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90%?

Solución.
a. x ≡ Vida en años de una especie de tortuga. Variable continua con distribución Normal

$$x : N(\mu,\ \sigma);\ \ \sigma = 10 \text{ años}$$

Para muestras de tamaño 10 elementos, las medias muestrales también siguen una distribución Normal.

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

Intervalo de probabilidad a partir de una media muestral es:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_o + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$Z_{\alpha/2}$ se calcula a partir del nivel de confianza; Nivel de confianza = 1– α = 0'95 ⇒ α = 0,05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

La media muestral se calcula conocida la muestra.

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_1^{10} x_i}{10} = \frac{375}{10} = 37{,}5$$

$$\left(37{,}5 - 1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}},\ 37{,}5 + 1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (31{,}3,\ 43{,}7)$$

Se puede estimar con una probabilidad del 95% que la vida media de las tortugas de dicha especie va a estar comprendida entre 31,3 y 43'7 años.

b. El tamaño muestral se calcula a parir del error máximo admitido.
Nivel de confianza = 1– α = 0'9 ⇒ α = 0,1

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}950) = 1{,}65$$

$$\varepsilon_{\text{máx}} \ge Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \ge \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2 = \left(1{,}65\cdot\frac{10}{5}\right)^2 = 10{,}89$$

$$n \ge 11$$

Junio 2008. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91 ; 68 ; 39 ; 82 ; 55 ; 70 ; 72 ; 62 ; 54 ; 67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%.

Solución.

a. Se pide calcular un intervalo de probabilidad para la media poblacional (μ) de una variable continua ($x \equiv$tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música) que sigue una distribución Normal, conocida la desviación de la variable y la media de una muestra de 10 elementos ($\bar{x}_o$).

El intervalo de probabilidad se obtiene a partir de la media muestral, por lo que se utilizan los parámetros de la variable media muestral.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=10} \bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

Intervalo de probabilidad:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Media muestral:

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{91+68+39+82+55+70+72+62+54+67}{10} = 66$$

Valor crítico ($Z_{\alpha/2}$). Se obtiene a partir del nivel de confianza ($1-\alpha$).

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1-\alpha = 0{,}90 : \alpha = 0{,}1 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}1}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}65$$

Sustituyendo en el intervalo:

$$\left(66 - 1{,}65 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}, 66 + 1{,}65 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right) = (58'2, 73'8)$$

Con un nivel de confianza del 90% se puede estimar que la media poblacional del tiempo empleado cada día en oír música por los estudiantes de secundaria esta comprendida en el intervalo:

(58’2, 73’8)

b. El mínimo tamaño muestral se obtiene del máximo error admitido.

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{Despejando el tamaño muestral: } n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1-\alpha = 0{,}95 : \alpha = 0'5 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96$$

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2 = \left(1'96 \cdot \frac{15}{5}\right)^2 = 34'5$$

$n \geq 35$

Junio 2008. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98%? Razónese.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95%?

Solución.

a. Para una variable x (rendimiento por hectárea), que sigue una distribución Normal, y de la que se ha obtenido una media de una muestra de 64 parcelas se pide comprobar si el error de estimación es menor a 0'5 con un nivel de confianza del 98%.

El problema se puede resolver comprobando:

$$p\left(\left|\mu - \overline{x}\right| < \text{Error}\right) \geq 0'98$$

Distribución de la variable media muestral:

$$x : N(\mu, 1) \xrightarrow{n=64} \overline{x} : N\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{64}}\right) = \overline{x} : N(\mu, 0'125)$$

$$p\left(\left|\mu - \overline{x}\right| < 0'5\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Tipificando}\\ \sigma = 0'125\end{matrix}\right\} = p\left(\frac{-0'5}{0'125} < z < \frac{0'5}{0'125}\right) = p(-4 < z < 4) = p(z < 4) - p(z \leq -4) =$$
$$= p(z < 4) - p(z \geq 4) = p(z < 4) - (1 - p(z < 4)) = 1 - (1 - 1) = 1$$

Se puede asegurar que el error en la estimación va a ser menor a 0'5 Ha con un nivel de confianza del 98 %.

Otra forma de resolver el problema es calcular si con los parámetros de la variable media muestral se puede admitir un error menor o igual a 0'5 Ha.

$$\varepsilon_{\text{máx}} = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{matrix} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0,98 : \alpha = 0'02 \end{matrix}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,02}{2}\right) = \phi^{-1}(0,99) = 2'33$$

$$\varepsilon_{\text{máx}} = 2'33 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = 0'3 < 0'5$$

Se admite la proposición.

b. El tamaño muestral se puede estimar a partir del máximo error admitido.

$$\varepsilon_{\text{máx}} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$\left.\begin{matrix} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0,95 : \alpha = 0'5 \end{matrix}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0,975) = 1,96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{1}{0'5}\right)^2 = 15,4$$

$$n \geq 16$$

Modelo 2008. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La edad de la población que vive en residencias de mayores en Madrid sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población difiere en menos de 2 años de la media de la muestra con un nivel de confianza del 95%?

Solución.

$x \equiv$ edad media de la población en residencias de mayores en Madrid. Variable continua que sigue una distribución normal.

$$x: N(\mu, \sigma)$$

La edad media de la población difiere en menos de dos años de la media de la muestra sí el error máximo admitido con un nivel de confianza del 95% es mayor de 2 años.

$$\varepsilon_{\text{máx}} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$Z_{\alpha/2}$ Se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\left.\begin{array}{r} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \text{N.C.}: 1-\alpha = 0'95 : \alpha = 0{,}05 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$\varepsilon_{\text{máx}} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\frac{7'3}{\sqrt{50}} = 2'02 > 2$$

Se puede asegurar que la edad media de la población difiere en menos de 2 años de la media de la muestra con un nivel de confianza del 95%

Modelo 2008. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg:

175, 180, 210, 215, 186, 213, 190, 213, 184, 195

Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15,3.

Se pide estimar la producción media del olivar con un nivel de confianza del 95%.

Solución.

$x \equiv$ Producción media de un olivo expresada en Kg. Variable continua que sigue una distribución normal.

$$x: N(\mu, \sigma)$$

Donde μ es la media poblacional y σ es la desviación típica.

Se pide estimar un intervalo de probabilidad para la media poblacional al 95% de confianza a partir de la media de una muestra de tamaño n = 10.

Para estimar el intervalo de probabilidad a partir de una media muestral es necesario obtener la distribución que siguen las medias muestrales de ese tamaño de la variable en estudio.

Las medias de las muestras de tamaño n de una variable continua x con distribución normal, también siguen una distribución normal, con la misma media y con diferente desviación típica.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de probabilidad a partir de una media muestral $(\overline{x}_o)$ para un determinado nivel de confianza viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $Z_{\alpha/2}$ es el valor crítico que se obtiene a partir del nivel de confianza.

$$\text{N.C.} = 1 - \alpha = 0'95 \Rightarrow \alpha = 0'05$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) \underset{N(0,1)}{=} 1'96$$

La media de la muestra se obtiene por la definición de media aritmética.

$$\overline{x}_o = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{175+180+210+215+186+213+190+213+184+195}{10} = 196'1$$

Sustituyendo los valores en el intervalo:

$$\left(196'1 - 1'96\cdot\frac{15'3}{\sqrt{10}}, 196'1 + 1'96\cdot\frac{15'3}{\sqrt{10}}\right) = (186'6, 205'6)$$

Con los datos disponibles de 10 olivos, se puede asegurar con una probabilidad del 95% que la media poblacional de los olivos va a estar comprendida entre 186’6 y 205’6 Kg.

Septiembre 2007. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:

(a) El intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99%.
(b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95%, un error en la estimación de la recaudación diaria media menor de 127 euros.

Solución.

$x \equiv$ Recaudación diaria. Variable continua que sigue una distribución Normal caracterizada por su media (μ) y su desviación (σ).

$$x: N(\mu, \sigma) \qquad \sigma = 328 \text{ €}$$

Para muestras de tamaño n = 100, la variable media muestral $(\overline{x})$, sigue también una distribución Normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{328}{\sqrt{100}}\right)$$

a. Intervalo de probabilidad para la media poblacional (μ) a partir de una media muestral $(\overline{x}_o)$ a un nivel de confianza ($1-\alpha$) del 99%.

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{x}_o = 1248 \text{ €}$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} 1-\alpha = 0'99 \\ \alpha = 0'01 \end{Bmatrix} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'01}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9950) = 2'58$$

$$\left(1248 - 2'58\cdot\frac{328}{\sqrt{100}}, 1248 + 2'58\cdot\frac{328}{\sqrt{100}}\right) \cong (1163, 1333)$$

Con una probabilidad del 99% se puede asegurar que la media de recaudación de los comercios del barrio va a estar comprendida entre 1163 y 1333 €.

b. $$E_{max} > Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E_{max}}\right)^2$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} 1-\alpha = 0'95 \\ \alpha = 0'05 \end{matrix}\right\} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'01}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{328}{127}\right)^2 = 25'6 \Rightarrow n \geq 26$$

Septiembre 2007. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95%.

Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

Solución.

$$E_{max} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E_{max}}\right)^2$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} 1-\alpha = 0'95 \\ \alpha = 0'05 \end{matrix}\right\} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'01}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{32}{10}\right)^2 = 39'3 \Rightarrow n \geq 40$$

Junio 2007. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{x}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{x}$?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución.

a) $x \equiv$ Edad de matrimonio de los hombres de Isla Barataria. Variable continua que sigue una distribución normal caracterizada por su media (μ) y su desviación típica(σ).

$$x : N(\mu, \sigma) = N\ (35,\ 5)$$

Para muestras de tamaño n = 100 las medias maestrales siguen una distribución normal con las siguientes características:

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(35, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(35, 0'5)$$

b) $$p(36 < \overline{x} < 37) \overset{N(35,0'5)}{=} \left\{\begin{matrix} \overline{x} = 36 : z = \dfrac{36-35}{0'5} = 2'00 \\ \overline{x} = 37 : z = \dfrac{37-35}{0'5} = 4'00 \end{matrix}\right\} = p(2'00 < z < 4'00) =$$

$$p(z < 4'00) - p(z \leq 2) = \phi(4'00) - \phi(2'00) = 1 - 0'9772 = 0'0228$$

$$p(36 < \overline{x} < 37) = 2'28\%$$

Nota: Los valores por encima del mayor valor de la variable tipificada en la tabla se toman como 1.

$$\phi(4'00) = 1.$$

Junio 2007. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima.: 2 puntos)

La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

57, 49, 70, 40, 45, 44, 49, 32, 55, 45

Hallar el intervalo de confianza al 95% para la duración media de las rosas.

Solución.

x ≡ Duración en horas de las rosas. Variable continua que sigue una distribución normal.

$$x: N(\mu, \sigma) \quad \sigma = 10 \text{ h}$$

Se pide calcular un intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño n = 10

$$\overline{x}_o = \frac{57+49+70+40+45+44+49+32+55+45}{10} = 48'6 \text{ h}$$

Para muestras de tamaño 10, las medias de las muestras siguen también una distribución normal.

$$\overline{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{10}{\sqrt{10}}\right)$$

Nivel de confianza = 95%: 1 – α = 0'95: α = 0'05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

Intervalo de confianza a partir de la media poblacional a partir de una media muestral con un nivel de confianza del 95% es:

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}_o + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituyendo por lo valores:

$$\left(48'6 - 1'96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}},\ 48'6 + 1'96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (42'4,\ 54'8)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que la duración media de las rosas está comprendida entre $(42'4,\ 54'8)$ horas.

Septiembre 2006. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración media de este modelo de batería.

Solución.

Se pide calcular un intervalo de probabilidad (Centrado) para la media poblacional de la duración de la batería de cierto móvil a partir de la media de una muestra de diez baterías.

x ≡ Meses de duración de la batería. Variable continua que sigue una distribución normal N(μ, σ) de la que se conoce la desviación (σ = 5 meses). Si se toman muestras de tamaño 10, las media muestrales también siguen una distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$.

Conocida una media muestral, se puede obtener el intervalo de confianza.

$$\left(\overline{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{x}_o = \frac{33+34+26+37+30+39+26+31+36+19}{10} = 31'1$$

Para un nivel de confianza del 95%, el Z crítico se calcula de la siguiente forma:

$$1-\alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05: \quad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

Sustituyendo en la expresión del intervalo:

$$\left(31'1 - 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}, 31'1 + 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (28'0, 34'2)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que la vida media de este modelo de batería va a estar comprendida entre $(28'0, 34'2)$ meses.

Septiembre 2006. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El peso en Kg. de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 Kg. y desviación típica 8 Kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

(a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.

(b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 Kg?

Solución.

a. $x \equiv$ Peso en Kg. De los estudiante universitarios de una gran ciudad. Es una variable continua que sigue una distribución Normal $(N(\mu, \sigma))$, siendo los parámetros de la distribución:

Media μ = 60 Kg

Desviación σ = 8 Kg.

Si de esta variable se toman muestras de tamaño 64 y de cada una se extrae su media, aparece la distribución de medias muestrales. Esta nueva distribución también sigue una distribución normal con igual media y distinta desviación, siendo la nueva desviación $\sigma/\sqrt{n}$, siendo n el tamaño de las muestras.

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(60, \frac{8}{\sqrt{64}}\right) = N(60, 1)$$

b. ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 Kg?

Lo primero es calcular la probabilidad de que la media este comprendida entre 59 y 61 Kg.

$$p(59 < \bar{x} < 61) \overset{N(60,1)}{=} \left\{\begin{array}{l} \bar{x} = 59 \rightarrow z = \dfrac{59-60}{1} = -1'00 \\ \bar{x} = 61 \rightarrow z = \dfrac{61-60}{1} = 1'00 \end{array}\right\} = p(-1'00 < z < 1'00) = p(z < 1'00) - p(z \le -100) =$$

$$= p(z < 1'00) - p(z \ge 100) = p(z < 1'00) - (1 - p(z < 100)) = 2p(z < 1'00) - 1 = 2\phi(1'00) - 1 =$$

$$= 2\cdot 0'8413 - 1 = 0'6826$$

En 100 de estas muestras cabe esperar = N · p = 100 · 0’6826 ≈ 68 Muestras

Junio 2006. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En cierta población humana, la media muestral $\bar{x}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\bar{x}$ sea menor o igual que 75 es 0,58 y la de que $\bar{x}$ sea mayor que 80 es 0,04.

Hallar la media y la desviación típica de x. (Tamaño muestral n = 100).

Solución.

Se pide calcular la media y la desviación de una variable de la que se conocen dos datos de probabilidad de la media de 100 muestras.

$$x : N(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=100} \bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{10}\right)$$

Tipificación: $\bar{x} \to z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/10}$

- $p(\bar{x} \le 75) = 0'58 \xrightarrow{\text{TIPIFICANDO}} p\left(z \le \dfrac{75-\mu}{\sigma/10}\right) = 0'58 \Rightarrow \phi\left(\dfrac{75-\mu}{\sigma/10}\right) = 0'58$

invirtiendo se obtiene una ecuación con dos incógnitas

$$\frac{75-\mu}{\sigma/10} = \phi^{-1}(0'58) = 0'2 : \text{ordenando} : 0'2\sigma + 10\mu = 750$$

- $p(\bar{x} > 80) = 0'04 : p(\bar{x} \le 80) = 1 - 0'04 = 0'96 \xrightarrow{\text{TIPIFICANDO}} p\left(z \le \dfrac{80-\mu}{\sigma/10}\right) = 0'96 \Rightarrow \phi\left(\dfrac{80-\mu}{\sigma/10}\right) = 0'96$

invirtiendo se obtiene una segunda ecuación con dos incógnitas

$$\frac{80-\mu}{\sigma/10} = \phi^{-1}(0'96) = 1'75 : \text{ordenando} : 1'75\sigma + 10\mu = 800$$

Con las dos ecuaciones se plantea un sistema que permite calcular la media y la desviación.

$$\begin{cases} 0'2\sigma + 10\mu = 750 \\ 1'75\sigma + 10\mu = 800 \end{cases} : \begin{cases} \sigma = 32'2 \\ \mu = 74'3 \end{cases}$$

Junio 2006. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima.: 2 puntos)

El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución N(μ, σ) con σ igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ.

Solución.

x ≡ tiempo de espera, variable continua que sigue una distribución normal N (μ, σ). σ = 3 min.

Para muestras de tamaño 10, las medias de las muestras también siguen una distribución normal

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$$

Se pide estimar al 95% de confianza un intervalo para la media poblacional (μ) a partir de una media muestral $(x_o = 5\,\text{min})$.

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95%, el Z crítico se calcula de la siguiente forma:

$$1 - \alpha = 0'95 \to \alpha = 0'05 : \quad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

Sustituyendo en el intervalo los datos del enunciado y el valor del Z crítico:

$$\left(5 - 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}},\ 5 + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = (3'14, 6'86)$$

Modelo 2006. 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé tiene una distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 horas. Una muestra de 40 clientes ha dado como resultado una media de tiempo de conexión de 2,85 horas. Se pide:

a. Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ

b. Calcular el tamaño mínimo que debería tener la muestra para estimar la media de tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de ese cibercafé, con un error menor o igual que 0,25 horas y una probabilidad de 0,95.

Solución.

a. $x \equiv$ tiempo diario de conexión a internet. Variable continua con distribución normal

$$x : N(\mu, 1'2)$$

Para muestras de tamaño n = 40, las medias de las muestras siguen también una distribución normal, cuyos parámetros son.

$$\bar{x} : N\left(\mu \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right)$$

Se pide obtener un intervalo de confianza al 95% para la media (μ) a partir de la media de una muestra $(\bar{x}_0 = 2'85h)$

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/2}\right)$$

$$\bar{x}_o = 2'85;\quad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} 1-\alpha = 0'95 \\ \alpha = 0'05 \end{Bmatrix} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96; \sigma = 1'2; n = 40.$$

$$\left(2'85 - 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{40}}, 2'85 + 1'96 \cdot \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right) = (2'49, 3'22)$$

Con una probabilidad del 95% se puede asegurar que la media poblacional va a estar comprendida entre 2’49 y 3’22 hora.

b. El tamaño poblacional se relaciona con el máximo error admitido por:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{1'2}{0'25}\right)^2 = 88'5$$

$$n \geq 89$$

Modelo 2006. 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Un fabricante de automóviles afirma que los coches de un cierto modelo tienen un consumo por cada 100 kilómetros que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 0,68 litros. Se observa una muestra aleatoria simple de 20 coches del citado modelo y se obtiene una media de consumo de 6,8 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media de consumo de ese modelo de vehículos.

Solución.

$X \equiv$ Consumo de combustible por cada 100Km. Variable continua que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, siendo la desviación típica (σ) 0’68 litros.

Si se toman muestras de 20 coches, y de cada muestra se obtiene la media, se genera una distribución de medias muestrales que también se ajustan a una Normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\bar{X} : N\left(\mu, \frac{0'68}{\sqrt{20}}\right)$$

Se pide determinar un intervalo de confianza para la media población (σ) a partir de una muestral $(\bar{X}_o)$ obtenida.

$$\left(\overline{X}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_o + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\overline{X}_o = 6'8\text{litros}$

$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} 1-\alpha = 0'95 \\ \alpha = 0'05 \end{Bmatrix} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$

$\sigma = 0'68$

$n = 20$

$$\left(6'8 - 1'96\cdot\frac{0'68}{\sqrt{20}}, 6'8 + 1'96\cdot\frac{0'68}{\sqrt{20}}\right) = (6'5, 7'1)$$

Con una confianza del 95% se puede asegurar que la media poblacional de consumo para 20 coches va ha estar comprendida entre 6’5 y 7’1 litros.

Septiembre 2005. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono móvil tiene una distribución normal de media 34’5 horas y desviación típica 6’9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos móviles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 32 y 33,5 horas?

b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?

Solución.

a. x ≡ Duración de las baterías en horas. Variable continua que sigue una distribución normal cuyos parámetros son:

$$x : N(\mu, \sigma) = \begin{Bmatrix} \mu \equiv \text{Media} = 34'5\text{ h} \\ \sigma \equiv \text{Desviación} = 6'9\text{ h} \end{Bmatrix} = N(34'5, 6'9)$$

Si se toman muestras de tamaño 36, las medias de la muestras también siguen una distribución normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \{n = 36\} = N\left(34'5, \frac{6'9}{\sqrt{36}}\right) = N(34'5, 1'15)$$

Se pide:

$$p(32 \le \overline{x} \le 33'5) \underset{N(34'5,1'15)}{\overset{\text{TIPIFICANDO}}{=}} \left\{ x \to z = \frac{x-\mu}{\sigma} \begin{matrix} x = 32 \to z = \dfrac{32-34'5}{1'15} = -2'17 \\ x = 33'5 \to z = \dfrac{33'5-34'5}{1'15} = -0'87 \end{matrix} \right\} = p(-2'17 \le z \le -0'87) =$$

$$= p(0'87 \le z \le 2'17) = p(z \le 2'17) - p(z < 0'87) = \phi(2'17) - \phi(0'87) =$$

$$\overset{N(0,1)}{=} \left\{ \begin{matrix} \phi(2'17) : \begin{Bmatrix} \text{Fila} : 2'10 \\ \text{Columna} : 0'07 \end{Bmatrix} = 0'7881 \\ \phi(0'87) : \begin{Bmatrix} \text{Fila} : 0'80 \\ \text{Columna} : 0'07 \end{Bmatrix} = 0'5793 \end{matrix} \right\} = 0'9850 - 0'8078 = 0'1772$$

$$p(32 \le \overline{x} \le 33'5) = 17'72\%$$

b. Se pide calcular:

$$p(\overline{x} > 38) \underset{N(34'5,1'15)}{\overset{\text{TIPIFICANDO}}{=}} \left\{ \begin{matrix} x \to z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ x = 38 \to z = \dfrac{38-34'5}{1'15} = 3'04 \end{matrix} \right\} = p(z > 3'04) = p(\overline{z \le 3'04}) = 1 - p(z \le 3'04) =$$

$$= 1 - \phi(3'04) \overset{N(0,1)}{=} \begin{Bmatrix} \text{Fila} : 3'00 \\ \text{Columna} : 0'04 \end{Bmatrix} = 1 - 0'9988 = 0'0012$$

La probabilidad de que una batería dure más de 38 h es del 0’12%.

Septiembre 2005. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0'2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?
Solución.
A partir del error máximo admitido, se obtiene el valor $Z_{\alpha/2}$. Conocido el Z crítico, se calcula el nivel de significación mediante la tabla de la distribución normal (α), conocido este último, se calcula el nivel de confianza ($1-\alpha$).

$$\varepsilon_{max} = Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} : \left\{\begin{array}{c} \sigma = 1 \\ n = 100 \\ \varepsilon_{máx} = 0'2 \end{array}\right\} \quad : \quad 0'2 = Z_{\alpha/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{100}} \quad : \quad Z_{\alpha/2} = 2'00$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = \phi\left(Z_{\alpha/2}\right) = \phi(2'00) \underset{N(0,1)}{=} 0'9772$$

despejando el nivel de significación (α). $\alpha = 0'0456$
Nivel de confianza = $1 - \alpha = 1 - 0'0456 = 0'9544$ (95'44 %)

Junio 2005. 4B. (puntuación máxima: 2 puntos).
En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.
(a) Hallar un intervalo de confianza al 80% para la media poblacional.
(b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?
Solución.
a. $x \equiv$ Número de libros que lee al año. Sigue una distribución normal N:(μ, 2).
Para muestras de tamaño n = 10 000, las medias de las muestras siguen también una distribución normal:

$$N:\left(\mu, \frac{2}{\sqrt{10\,000}}\right)$$

En una muestra se ha obtenido un valor medio $\bar{x}_o = 5$. El intervalo de probabilidad a partir de esta muestra viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor crítico, que se obtiene a partir del nivel de confianza ($1 - \alpha = 0'80$) mediante la siguiente expresión:

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'2}{2}\right) = \phi^{-1}(0'90) = 1'28$$

sustituyendo los valores en el intervalo

$$\left(5-1'28\cdot\frac{2}{\sqrt{10\,000}}, 5+1'28\cdot\frac{2}{\sqrt{10\,000}}\right) = (4'97, 5'03)$$

El 80% de las medias de las muestras de 10 000 elementos van a estar comprendidas entre 4'97 y 5'03.

b. El tamaño de muestra se puede obtener a partir del máximo error admitido mediante la expresión:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad\qquad n > \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}}\right)^2$$

Para un nivel de confianza del 95% el z crítico vales:

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

sustituyendo

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}} \right)^2 = \left(1'96 \cdot \frac{2}{0'25} \right)^2 = 245'8$$
$$n \geq 246$$

Junio 2005. 4B. (puntuación máxima: 2 puntos).

Para una población N (μ, σ = 25), ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0,95 ?

Solución.

El tamaño de muestra se puede obtener a partir del máximo error admitido mediante la expresión:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad\qquad n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}} \right)^2$$

Para un nivel de confianza del 95% el z crítico vales:

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

sustituyendo

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}} \right)^2 = \left(1'96 \cdot \frac{25}{5} \right)^2 = 96'04$$
$$n \geq 97$$

Modelo 2005. 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1,5 días. Una muestra aleatoria de diez empleados ha proporcionado los siguientes datos

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

a) Determinar un intervalo de confianza del 90% para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los últimos seis meses.

b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 días, con el mismo nivel de confianza?

Solución.

a. $x \equiv n^o$ de días de ausencia en el trabajo, se aproxima a una distribución normal de la que se conoce su desviación pero no su media.

$$x : N(\mu, \sigma) = N(\mu, 1'5)$$

Si en esta variable se toman muestras de tamaño 10 y de cada muestra se calcula la media, se obtiene una distribución de medias muestrales, que sigue teniendo un comportamiento normal, cuyos parámetros serán:

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{1'5}{\sqrt{10}}\right)$$

Se pide determinar un intervalo de confianza $(1 - \alpha)$ al 90% para el número medio de días de ausencia a partir de una media muestral conocida.

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/z} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/z} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\bar{x}_o = \frac{5+4+6+8+7+4+2+7+6+1}{10} = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{\alpha/z} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = 0'90 : \alpha = 0'10 \end{array} \right\} : Z_{\alpha/z} = \phi^{-1}(0'95) = 1'65$$

$$\left(5-1'65\cdot\frac{1'5}{\sqrt{10}}, 5+1'65\cdot\frac{1'5}{\sqrt{10}}\right)=(4'22, 5'78)$$

Se puede estimar con una probabilidad del 90% que la media de ausencia por empleado va a estar en el intervalo $(4'22, 5'78)$.

b. El tamaño muestral para un nivel de confianza fijado, se estima a partir del máximo error admitido.

$$E\ge Z_{\alpha/z}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ n\ge\left(Z_{\alpha/z}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1'65\cdot\frac{1'5}{0'5}\right)^2=24'5...$$

Para $n\ge 25$ Muestras.

Modelo 2005. 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7°C Y desviación típica 3,8°C. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a) Sea menor o igual a 36,9°C.

b) Esté comprendida entre 36,5°C y 37,3°C.

Solución.

a. $x\equiv$ Temperatura: $N(36'7,\ 3'8)$

Las medias de las muestras de tamaño 100 siguen también una distribución Normal:

$$\bar{x}: N_{\bar{x}}\left(36'7, \frac{3'8}{\sqrt{100}}\right)=N_{\bar{x}}(36'7,\ 0'38)$$

$$p(\bar{x}\le 36'9)=\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=36'9\\ z=\dfrac{36'9-36'7}{0'38}=0'53\end{array}\right\}=p(z\le 0'53)=\phi(0'53)=0'7019:\ \ p(\bar{x}\le 36'9)=70'19\%$$

b.

$$p(36'5<\bar{x}<37'3)=\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=36'5\to z=\dfrac{36'5-36'7}{0'38}=-0'53\\ \bar{x}=37'3\to z=\dfrac{37'3-36'7}{0'38}=1'58\end{array}\right\}=p(-0'53<z<1'58)=p(z\le 1'58)-p(z<-0'53)=$$

$$=p(z\le 1'58)-p(z>0'53)=p(z\le 1'58)-(1-p(z\le 0'53))=\phi(1'58)-(1-\phi(0'53))=0'9429-(1-0'7019)=0'6448$$

$$p(36'5<\bar{x}<37'3)=64'48\%$$

Septiembre 2004. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos

88 90 90 86 87 88 91 92 89

hallar un intervalo de confianza al 95% para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución.

$x\equiv$ Variable continua que proporciona el peso de las tarrinas

La variable x sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 1'8 gr.

$$N(\mu,\sigma)=N(\mu, 1'8)$$

Se pide calcular el intervalo de confianza al 95% a partir de una muestra de nueve elementos. Las medias de las muestras de nueve elementos también siguen una distribución normal cuyos parámetros son:

$$N_{\bar{x}}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N_{\bar{x}}\left(\mu,\frac{1'8}{\sqrt{9}}\right)=N_{\bar{x}}(\mu, 0'6)$$

El intervalo de confianza para las medias muestrales, a partir de la media de una muestra viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9} = 89$$

A partir del nivel de confianza se calcula el nivel de significación y con este el Z crítico.
Nivel de confianza = 0'95 = 1 – α : α = 0'05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$\left(89 - 1'96\cdot\frac{1'8}{\sqrt{9}}\ ,\ 89 + 1'96\cdot\frac{1'8}{\sqrt{9}}\right) = (87'8,\ 90'2)$$

Septiembre 2004. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para garantizar que, en la estimación de la media de una población normal con varianza igual a 60, al 90% de confianza, el error de estimación cometido no sea superior a 3 unidades.
Solución.
El error máximo admitido viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{máx} > Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de la cual se puede despejar el tamaño muestral(n) en función del error, la desviación típica y del nivel de confianza a través del Z crítico.

$$n > \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

- Desviación: $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{60}$

- Z crítico: $\left.\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \\ N.C. = 1-\alpha = 0'90 : \alpha = 0'10 \end{array}\right\} : Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'10}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9500) = 1'65$

Sustituyendo los datos en la expresión el tamaño muestral:

$$n > \left(1'65\cdot\frac{\sqrt{60}}{3}\right)^2 = 18'15 \Rightarrow n \geq 19$$

Junio 2004. 4A. (puntuación máxima: 2 puntos).
En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan un día concreto. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?
b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman muestras aleatorias de 64 clientes? Especificar sus parámetros.

Solución.
x ≡ tiempo de espera hasta recibir atención. Variable continua que sigue una distribución normal de media(μ) 10 y desviación típica(σ) 2.

$$x : N\ (10,\ 2)$$

Si se toman muestra de tamaño 25, las medias de estas muestras $(\bar{x})$ siguen una distribución también normal de igual media y desviación $\left(\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}\right)$

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(10, \frac{2}{5}\right)$$

a. Calcular $p(\bar{x} \le 9)$. Tipificando la variable respecto de la distribución que sigue

$$p(\bar{x} \le 9) = \left\{ \begin{matrix} N_{\bar{x}}\left(10, {}^{2}\!/_{5}\right) \\ z = \dfrac{9-10}{{}^{2}\!/_{5}} = -2'50 \end{matrix} \right\} = p(z \le -2'50) = p(z \ge 2'50) = 1 - p(z < 2'50) = 1 - \phi(2'50) = 1 - 0'9938$$

$$p(\bar{x} \le 9) = 0'0062$$

b. Para muestras de tamaño 64, las media muestrales siguen una distribución con los siguientes parámetros:

$$\left. \begin{matrix} \text{Media} = 10 \\ \text{Desviación típica} = \dfrac{2}{\sqrt{64}} = \dfrac{1}{4} \end{matrix} \right\} : \bar{x} : N_{\bar{x}}\left(10, \frac{1}{4}\right)$$

Junio 2004. 4B. (puntuación máxima: 2 puntos).

El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

(a) Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.

(b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99%, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

Solución.

a. $x \equiv$ precio de electrodoméstico. Variable continua que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Se pide calcular un intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media de una muestra de tamaño n = 9. Las medias de muestras de 9 elementos de la variable x también siguen una distribución normal.

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{9}}\right)$$

El intervalo de confianza tiene la expresión

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{255 + 85 + 120 + 290 + 80 + 80 + 275 + 290 + 135}{9} = 178'9$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = '98 \Rightarrow \alpha = 0'02$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'02}{2}\right) = \phi^{-1}(0'99) = 2'33$$

Sustituyendo los datos en el intervalo de confianza:

$$\left(178'9 - 2'33 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}} \ , \ 178'9 + 2'33 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101'2 \ , \ 256'6)$$

Entre 101’2 € y 256’6 € estará el precio medio de nueve electrodomésticos con una probabilidad del 98%

b.

$$E_{máx} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = '99 \Rightarrow \alpha = 0'01$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'01}{2}\right) = \phi^{-1}(0'995) = 2'57$$

sustituyendo

$$n > \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2 = \left(2'57\cdot\frac{100}{50}\right)^2 = 26'6$$

$$n \geq 27 \text{ elementos}$$

Si se aumenta el tamaño de la muestra, aumenta el nivel de confianza.

Modelo 2004. 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral aleatoria de tamaño n?

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

Solución.

$x \equiv$ Variable continua. Ingresos diarios.

$$x \to N(400,250)$$

a. Si te toman muestras de tamaño n y de cada muestra se saca la medida (media muestral),se obtiene una distribución de medias muestrales $(\bar{x})$

$$\bar{x} \to N\left(400, \frac{250}{\sqrt{n}}\right)$$

b. Para muestras de tamaño 25, las medias muestrales siguen una distribución normal:

$$n = 25;\qquad \bar{x} \to N\left(400, \frac{250}{\sqrt{25}}\right) = N(400,50)$$

$p(350 < \bar{x} < 450)$ tipificando la variable.

$$z = \frac{x-400}{50}:\ \begin{cases} \text{Si}\quad \bar{x} = 350 \Rightarrow z = \dfrac{350-400}{50} = -1'00 \\ \text{Si}\quad \bar{x} = 450 \Rightarrow z = \dfrac{450-400}{50} = 1'00 \end{cases}$$

$$p(350 < \bar{x} < 450) = p(-1'00 < z < 1'00) = p(z < 1'00) - p(z \leq -1'00) = p(z < 1'00 - p(z \geq 1'00)) =$$

$$= p(z < 1'00) - (1 - p(z < 1'00)) = 2p(z < 1'00) - 1 = 2\phi(1'00) - 1 = \begin{Bmatrix} \text{Fila}: 1'0 \\ \text{Columnas}: 0'00 \end{Bmatrix} = 2\cdot 0'8413 - 1 = 0'6826$$

$$p(350 < \bar{x} < 450) = 68'26\%$$

Modelo 2004. 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El salario de los trabajadores de tina ciudad siguen una distribución normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio, con un nivel de confianza del 95%. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 6 euros.

Solución.

$x \equiv$ Salario $\qquad \bar{x} \equiv$ media de una muestra de n salarios $\quad c \equiv$ amplitud = 2ε

$$x : N(\mu,15); \qquad \bar{x} : N\left(\mu, \frac{15}{\sqrt{n}}\right)$$

Se pide calcular el tamaño muestral para que el error máximo permitido no exceda de 6€ con un nivel de confianza$(1-\alpha)$ del 95%.

El error máximo permitido de una variable media muestral viene expresado por:

$$\varepsilon \geq Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ecuación de la que se puede despejar el mínimo, tamaño muestral.

$$n \geq \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\sigma = 15\ ;\quad \varepsilon = \frac{6}{2} = 3\ ;\qquad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \alpha = 0'95 \Rightarrow\ \alpha = 0'05 \Rightarrow\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'9750$$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{15}{3}\right)^2 = 96'04$$

$$n \geq 97$$

Septiembre 2003. Ejercicio 4A. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual a 6 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que s necesario observar.

Solución.

$$x \equiv \text{Tiempo de conexión a Internet}$$

x es una variable continua que sigue una distribución normal del tipo

$$x : N(\mu, \sigma) = N(\mu, 15)$$

Se toman muestras de tamaño n de las que se obtienen las medias, generando con estas una nueva distribución denominada distribución de medias muestrales, que también sigue una distribución normal.

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En los intervalos de confianza de estas variables se admite un error máximo cuya expresión es:

$$\varepsilon_{\text{máx}} \geq Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es un valor crítico que depende de nivel de significación(α), siendo este complementario del nivel de confianza($1 - \alpha$).

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ϕ^{-1} representa la lectura indirecta en la tabla de la Normal (0, 1)

Datos: El error máximo admitido se calcula a partir de la amplitud:

$$2\varepsilon_{\text{máx}} = \text{amplitud} = 6 \Rightarrow \varepsilon_{\text{máx}} = \frac{6}{2} = 3$$

Nivel de confianza($1 - \alpha$) = 0’95 $\Rightarrow \alpha$ = 0’05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = \left\{\begin{array}{l}\text{Fila} : 1'9 \\ \text{Columna} : 0'06\end{array}\right\} = 1'96$$

σ = 15

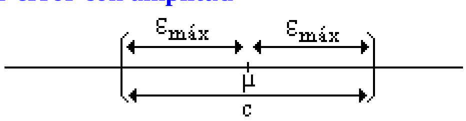
Sustituyendo

$$6 \geq 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} : n \geq \left(1'96 \cdot \frac{15}{3}\right)^2 = 96'04$$

$$n \geq 97$$

El mínimo tamaño muestral deberá de ser de al menos 97 alumnos.

Mucho cuidado con confundir error con amplitud



Septiembre 2003. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se ha extraído una muestra de 150 familias de residentes en un barrio obteniéndose que la renta familiar media asciende a 20000 euros. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 1500 euros.

a) A partir de estos datos, calcular un intervalo de confianza para la renta familiar media con un nivel de confianza del 95%.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo es necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 90%, un error en la estimación de la renta familiar media no superior a ±142 euros?

Solución.

a. x(Renta familiar) es una variable continua que sigue una distribución normal del tipo

$$x : N(\mu, \sigma) = N(\mu, 1500)$$

Se toman muestras de tamaño 150 de las que se obtienen las medias, generando con estas una nueva distribución denominada distribución de medias muestrales, que también sigue una distribución normal.

$$\bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{1500}{\sqrt{150}}\right)$$

Se pide calcular el intervalo de probabilidad a partir de un valor muestral $(\bar{x}_o = 20000)$ a un nivel de confianza del 95%.

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_o + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es un valor crítico que depende de nivel de significación(α), siendo este complementario del nivel de confianza(1 – α).

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ϕ^{-1} representa la lectura indirecta en la tabla de la Normal (0, 1)

Nivel de confianza(1 – α) = 0'95 $\Rightarrow$ α = 0'05

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = \left\{\begin{matrix}\text{Fila} : 1'9 \\ \text{Columna} : 0'06\end{matrix}\right\} = 1'96$$

sustituyendo en el intervalo

$$\left(20000 - 1'96 \cdot \frac{1500}{\sqrt{150}}, 20000 + 1'96 \cdot \frac{1500}{\sqrt{150}}\right) = (19760, 20240)$$

b. En los intervalos de confianza se admite un error máximo cuya expresión es:

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde:

Nivel de confianza(1 – α) = 0'90 $\Rightarrow$ α = 0'10

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'10}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9500) = \left\{\begin{matrix}\text{Fila} : 1'6 \\ \text{Columna} : 0'04\end{matrix}\right\} = 1'64$$

Sustituyendo

$$142 \geq 1'64 \cdot \frac{1500}{\sqrt{n}} : n \geq \left(1'64 \cdot \frac{1500}{142}\right)^2 = 300'1$$

$$n \geq 301$$

El mínimo tamaño muestral deberá de ser de al menos 301 familias.

Junio 2003. 4A. (puntuación máxima: 2 puntos).

Se estima el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal como desviación típica 0,05 segundos. Si quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

Solución.

Se pide calcular el tamaño de muestra para una variable continua que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación conocida para que el error de estimación de la media no sea mayor de una cierta cantidad

$x \equiv$ tiempo de reacción.

$$x: N(\mu, 0'05)$$

las muestras de tamaño n de esta variable siguen une distribución normal

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{0'05}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo el máximo error admitido

$$\varepsilon_{max} > Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

expresión que permite calcular el mínimo tamaño muestral fijado el máximo error admitido

$$n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{max}}\right)^2$$

siendo

– α(Nivel de significación) = 1 – Nivel de confianza = 1 – 0'99 = 0'01

– $Z_{\alpha/2}(\text{valor crítico}) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{0'01}{2}\right) = \varphi^{-1}(0'9950) = 2'58$

– $\varepsilon_{máx.}$(Error máximo admitido) = 0'01

– σ(desviación típica) =0'05

sustituyendo en la desigualdad

$$n > \left(2'58 \cdot \frac{0'05}{0'01}\right)^2 = 166'41$$

por lo que la mínima muestra deberá ser:

$$n \geq 167$$

Junio 2003. 4B. (puntuación máxima: 2 puntos).

Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litro. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

Solución.

$x \equiv$ consumo de gasolina cada 100 Km. Es una variable continua que sigue una distribución normal

$$x: N(\mu, 2)$$

Se toma una muestra de 10 automóviles y se obtiene un consumo medio

$$\bar{x} = 6'5 \ {}^{L}\!/\!{}_{100\,Km}$$

Las medias del consumo de muestras de 10 automóviles también es una variable continua que sigue una distribución normal

$$\bar{x}: N\left(\mu, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media del consumo estimada a partir de una muestra de tamaño 10 será:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde:

– α(Nivel de significación) = 1 – Nivel de confianza = 1 – 0'95 = 0'01

– $Z_{\alpha/2}(\text{valor crítico}) = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$

– $\bar{x} = 6'5$
– $\sigma = 2$
– $n = 10$

sustituyendo

$$\left(6'5 - 1'96\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\ ,\ 6'5 + 1'96\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

operando

$$(5'3\ ,\ 7'7)\ \text{Litros cada 100 Km.}$$

Con un nivel de confianza del 95 % se puede estimar que la media de consumo de gasolina cada 100 Km. en este modelo de automóvil estará comprendida entre 5’3 y 7’7 litros

Septiembre 2002. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
De una población de distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño n y se calcula su media muestral.

a. ¿Qué valor debe tener n para que se cumpla la desigualdad $|\bar{x}-\mu| < 2$ con una probabilidad de 0,95?

b. Resolver el apartado anterior con una probabilidad de 0,90. Comparar ambos resultados.

Solución:

a. Se pide calcular el tamaño de muestra de una distribución normal conocido el máximo error permitido y el nivel de confianza exigido($1-\alpha = 95\%$).

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{\varepsilon_{max}}\right)^2 = \begin{cases} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96 \\ \sigma = 6 \\ \varepsilon_{max} = |\bar{x}-\mu| = 2 \end{cases} = \left(\frac{1'96\cdot 6}{2}\right)^2 = 34'57$$

$$n \geq 35$$

b. En este apartado se vuelve a pedir el tamaño muestral en la misma condiciones pero disminuyendo el nivel de confianza($1-\alpha = 90\%$)

$$n > \left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{\varepsilon_{max}}\right)^2 = \begin{cases} Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0'10}{2}\right) = \phi^{-1}(0'90) = 1'64 \\ \sigma = 6 \\ \varepsilon_{max} = |\bar{x}-\mu| = 2 \end{cases} = \left(\frac{1'64\cdot 6}{2}\right)^2 = 24'21$$

$$n \geq 25$$

Al aumentar el tamaño de la muestra, la desviación muestral tiende a cero y por tanto el nivel de confianza aumenta, la diferencia entre la media de la muestra y la de la población disminuye, y por tanto la probabilidad de que una de ellas sea menor que un cierto valor aumenta.

Junio 2002. 4B. (puntuación máxima: 2 puntos).
La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica de 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida es de 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

Solución.

Se define una variable continua x que mide la duración de las llamadas telefónicas. Esta variable sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 10 seg.

$$x : N(\mu, 10)$$

Para estimar un intervalo de confianza para la media de la duración de las llamadas, se toma una muestra de tamaño n = 50, por lo que se genera una nueva variable denominada media muestral $\overline{x}$. Esta variable sigue una distribución también normal.

$$\overline{x} : N\left(\mu, \frac{10}{\sqrt{50}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media vendrá dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo:

$\overline{x} = \text{media de la muestra} = 35\,\text{seg}$

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \begin{Bmatrix} 1-\alpha = 0'99 \\ \alpha = 0'01 \end{Bmatrix} = \phi^{-1}(0'9950) = 2'57$$

sustituyendo en la expresión

$$\left(35 - 2'57 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}, 35 + 2'57 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}\right) = (31'4, 38'6)$$

La probabilidad de que la media de 50 llamadas este comprendida entre (31’4, 38’6) segundos es de 99%.

Septiembre 2001. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima 2 puntos)

El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con desviación típica 0,6 kg. Una muestra aleatoria de 30 animales ha dado un peso medio de 7,4 kg.

(a) Calcúlese un intervalo de confianza al 99% para el peso medio de los perros adultos de esta raza.

(b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para tener una confianza del 95% de que la media muestral no se diferencie en más de 0,3 kg de la media de la población?

Solución.

a. x ≡ Variable continua que índica el peso de los perros de una determinada raza, sigue una distribución normal N(μ, σ).

Tomando muestras de tamaño 30, se genera una nueva variable $\overline{x}$, media aritmética del peso de una muestra, también es una variable continua que sigue una distribución normal $N_{\overline{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El intervalo de confianza para muestras de tamaño n de una variable(media muestral) que sigue una distribución N es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo α el nivel de significación, y 1 – α, el nivel de confianza(0’99) ó la probabilidad de que una cualquiera de las medias de las muestra caiga dentro del intervalo pedido.

Aplicando al caso propuesto:

$$\overline{x} = 7'4 \quad : \quad \sigma = 0'6 \quad : \quad Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'01}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9950) = 2'58 \quad : \quad n = 30$$

sustituyendo en el intervalo

$$\left(7'4 - 2'58 \cdot \frac{0'6}{\sqrt{30}}, 7'4 + 2'58 \cdot \frac{0'6}{\sqrt{30}}\right) = (7'1, 7'7)$$

El 99% de la medias de muestras de tamaño 30 estarán comprendidas entre 7’1 y 7’7 kg

b. El tamaño muestral(n) y el máximo error permitido están relacionados, a menor error permitido, mayor tamaño muestral. El máximo error permitido es el radio del intervalo $\left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

expresión de la que se puede despejar el tamaño muestral en unción del máximo error permitido

$$n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}} \right)^2$$

hay que calcular de nuevo el valor de $Z_{\alpha/2}$ ya que se ha variado el nivel de confianza($1 - \alpha = 0'95$: $\alpha = 0'05$)

$$Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9750) = 1'96$$

sustituyendo en el tamaño muestral:

$$n \geq \left(1'96 \cdot \frac{0'6}{0'3}\right)^2 = 15'4$$

$$n \geq 16$$

Septiembre 2001. Ejercicio 3B. (Puntuación máxima 2 puntos)
En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del pH de una solución, con los resultados siguientes:

7'91	7'94	7'90	7'93	7'89	7'91

Se supone que la población de todas las determinaciones del pH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con desviación típica igual a 0,02.

(a) Determínese un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las determinaciones del pH de la misma solución obtenidas con el mismo método.

(b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo 0,02?

Solución.

a. Se pide calcular un intervalo de probabilidad de una variable continua(x = pH), a partir de la media de una muestra de tamaño $n = 6$.

$$\text{Media de la muestra: } \bar{x}_o = \frac{7'91 + 7'94 + 7'90 + 7'93 + 7'89 + 7'91}{6} = 7'91$$

Si la variable x sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, las medias de las muestras de tamaño $n = 6$ siguen una distribución $N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, y los intervalos de probabilidad a partir de una media muestral son:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es un valor crítico dependiente del nivel de confianza($1 - \alpha$).

Aplicando al caso propuesto:

$$\bar{x} = 7'91 \ : \ \sigma = 0'02 \ : \ Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'02}{2}\right) = \phi^{-1}(0'9900) = 2'33 \ : \ n = 6$$

sustituyendo en el intervalo

$$\left(7'91 - 2'33 \cdot \frac{0'02}{\sqrt{6}}, 7'91 + 2'33 \cdot \frac{0'02}{\sqrt{6}}\right) = (7'89, 7'93)$$

b. La amplitud del intervalo es el máximo error permitido, y este es:

$$\varepsilon_{máx} \geq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

expresión de la que se puede despejar el tamaño muestral en unción del máximo error permitido

$$n \geq \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{máx}} \right)^2$$

sustituyendo en el tamaño muestral:

$$n \geq \left(2'33 \cdot \frac{0'02}{0'02}\right)^2 = 5'4 \Rightarrow n \geq 6$$

Junio 2001. Ejercicio 4B. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg.

(a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de esa variedad de sandía

Solución.

a. Se pide calcular el intervalo de confianza para la media de una variable continua de la que se toman muestras de tamaño 100, a partir del peso medio de una muestra.

Si la variable($x \equiv$ peso de las sandias) sigue una distribución normal N(μ, σ), las media de las muestras de tamaño 100 de esta variable seguirán una distribución normal $N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$x: N(\mu, 1) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} : N_{\bar{x}}\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = N_{\bar{x}}(\mu, 0'1)$$

El intervalo de confianza del peso de las sandias a partir de una media muestral viene espesado por:

$$\left(\bar{x}_o - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_o + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

$\bar{x}_o$ = peso medio de la muestra

$Z_{\alpha/2}$ = Valor crítico, función del nivel de significación(α), siendo 1 – α, el nivel de confianza.

$$\alpha = 1 - 0'95 = 0'05 \ \Rightarrow \ Z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0'05}{2}\right) = \phi^{-1}(0'975) = 1'96$$

sustituyendo en el intervalo de probabilidad

$$\left(6 - 1'96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}},\ 6 + 1'96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = (5'8,\ 6'2)$$

Septiembre 1999. Ejercicio 3A. (Puntuación máxima: 2 puntos) Una variable aleatoria tiene una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si se extraen muestras aleatorias simples de tamaño n,

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$?

b) Si se toman muestras de tamaño n = 4 de una variable aleatoria X con distribución N(165, 12) calcúlese $p(\overline{X} < 173'7)$.

Solución

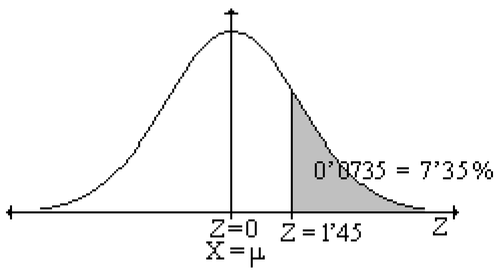
a. La media de las medias muéstrales $(\overline{X})$, es igual a la media real de la población (μ), mientras que la desviación típica de las medias muéstrales viene dada por $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Esto significa que la distribución de las medias muéstrales de tamaño n, extraídas de una población normal N(μ,σ), se ajustan a una normal $N_{\overline{X}}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

b. Si tomamos muestras, de tamaño 4, de una distribución N(165,12), las medias de estas muestras seguirán una distribución $N\left(165, \frac{12}{\sqrt{4}}\right)$, es decir, $\overline{X}$ tendrá una distribución N(165,6). Para calcular la $p(\overline{X} > 173'7)$, habrá que tipificar la variable con los parámetros de la distribución.

Sí $\overline{X} = 173'7$ entonces $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \dfrac{173'7 - 165}{6} = 1'45$, por lo tanto

$$p(\overline{X} > 173'7) = p(Z > 1'45) = p(\overline{Z \le 1'45}) = 1 - p(Z \le 1'45) = 1 - \varphi(1'45) = 0'0735$$

$$\varphi(1'45) = \left\{ \text{TABLA} \begin{cases} F \to 1'4 \\ C \to .05 \end{cases} \right\} = 0'0735$$



Septiembre 1999. 4B. (Puntuación máxima 2 puntos)

Se está realizando una encuesta sobre el nivel de conocimientos generales de los estudiantes de Bachillerato de Madrid. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de éstos estudiantes, a los que se ha realizado un examen. Las calificaciones obtenidas han sido las siguientes:

7'8 6'5 5'4 7'1 5'0 8'3 5'6 6'6 6'2.

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de desviación típica conocida e igual a 1. Se pide:

a) Un intervalo de confianza al 98% para la media de las calificaciones en el examen

b) El tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0,5 puntos, con un nivel de confianza del 95%.

Solución

a. Se pide calcular un intervalo de confianza para la media (se supone poblacional) con un nivel de confianza del 98%, a partir de una media obtenida de una muestra de tamaño 9. En estos casos la variable media de las muestras sigue una distribución del tipo $N(\overline{X}, \sigma_{\overline{X}})$, donde $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ con lo que la distribución queda de la forma: $N_{\bar{x}}\left(\bar{x}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El intervalo de confianza para una variable con esta distribución viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde α representa el riesgo que se asume.

Nivel de confianza = 1 – α = 0'98; α = 0'02; $\alpha/2 = 0'01; \phi^{-1}(Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0'99 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2'33$

$$\bar{x} = \frac{7'8 + 6'5 + 5'4 + 7'1 + 5'0 + 8'3 + 5'6 + 6'6 + 6'2}{9} = 6'5$$

$$\left(6'5 - 2'33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}, 6'5 + 2'33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = (5'7, 7'3)$$

b. $E_{máx} = Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ despejando n: $n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E_{máx}}\right)^2$

$$1 - \alpha = 0'95;\ Z_{\alpha/2} = 1'96$$

$$n > \left(1'96 \cdot \frac{1}{0'5}\right)^2 = 15'4 \Rightarrow n \ge 16$$